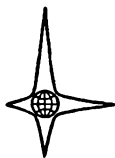


БИБЛИОТЕКА СБОРНИКА

МЕХАНИКА

Д. Ф. Лоуден

**Оптимальные
траектории
для космической
навигации**



ИЗДАТЕЛЬСТВО

«М И Р»

OPTIMAL TRAJECTORIES FOR SPACE NAVIGATION

D. F. LAWDEN, M. A., Sc. D.

Department of Mathematics,
University of Canterbury,
New Zealand

LONDON
Butterworths
1963

БИБЛИОТЕКА СБОРНИКА „МЕХАНИКА“

Д. Ф. ЛОУДЕН

ОПТИМАЛЬНЫЕ ТРАЕКТОРИИ ДЛЯ КОСМИЧЕСКОЙ НАВИГАЦИИ

Перевод с английского

В. К. ИСАЕВА

ИЗДАТЕЛЬСТВО «МИР»

Москва 1966

Монография посвящена методам выбора оптимальной траектории космического аппарата. Автор — известный специалист в этой области. Изложение материала доступное, не требующее от читателя специальной подготовки; необходимые сведения из вариационного исчисления представлены в форме, удобной для исследования управляемых процессов.

Начинающих работа Лоудена ознакомит с методикой составления и анализа необходимых условий на примере задач ракетодинамики. Для специалиста интересно изложение общей теории оптимальных траекторий в произвольном гравитационном поле и теории импульсных перелетов, а также результаты исследований автора в области так называемых особых оптимальных траекторий в ньютоновом поле.

Книга представляет интерес для научных работников и инженеров, работающих в области космонавтики, и для специалистов по теоретической механике. Она доступна аспирантам и студентам университетов и технических вузов,

ПРЕДИСЛОВИЕ К РУССКОМУ ИЗДАНИЮ

Мне хочется поблагодарить В. К. Исаева за его работу над переводом и выразить надежду, что настоящая монография окажется полезной русским ученым, работающим в области космической науки и систем управления.

Д. Ф. Лоуден

Кентерберийский университет,
Крайстчёрч,
Новая Зеландия,
Июнь 1966 г.

ПРЕДИСЛОВИЕ АВТОРА

Проблемы оптимизации траекторий ракет на протяжении последних десяти лет служат предметом усиленного изучения. Для их решения разработаны достаточно общие аналитические и численные методы. Настоящая монография посвящена исключительно аналитическому подходу, и в ней не рассматриваются численные методы, такие, например, как метод скорейшего спуска [1, гл. III] и [3], метод динамического программирования Беллмана [2] и др. Справедливости ради следует сказать, что ввиду сложности большинства практических задач в этой области обращение к численным исследованиям обычно бывает неизбежным на начальной стадии, когда о решении еще ничего не известно. Однако аналитический подход не менее полезен по следующим соображениям. Опыт учит нас, что форма оптимальной траектории редко бывает очень чувствительной относительно численных параметров задачи. Таким образом, если при помощи подходящих упрощающих допущений реальную проблему можно привести к некоторой идеализированной задаче, допускающей аналитическое решение, то последнее зачастую будет являться отличным приближением для оптимальной программы регулирования тяги двигателя в реальной ситуации. Все, что остается после этого сделать, — это пересчитать траекторию на основе имеющейся программы с учетом истинных обстоятельств. Далее, лишь с позиций аналитического подхода к любой области исследования могут быть вскрыты те общие закономерности, которые ведут к подлинному пониманию природы явлений. При недооценке сказанного выбор направления

численного изучения затрудняется, в результате чего процесс счета становится неоправданно долгим или даже совсем неэффективным. Что касается почти доброй половины возможностей использования математики для нужд практики, то аналитический и численный подходы скорее дополняют друг друга, чем исключают.

Математическая подготовка, которая требуется от читателя, подробно описана в предварительных замечаниях. Она приблизительно соответствует стандартному уровню студентов-второкурсников математических факультетов университетов и весьма подходит для изучения студентами указанного профиля на третьем году обучения. Такой курс, дополненный более глубокими главами вариационного исчисления, может служить для замены некоторых факультативных курсов прикладной математики. Он предназначен студентам, интересующимся этой традиционной областью анализа, которая после периода относительного забвения вновь привлекла к себе повышенное внимание в силу потребностей практики. Однако моей основной целью было дать введение в математическую теорию оптимальных траекторий для быстро растущего отряда молодых специалистов в области космических исследований, которые работают в сфере астродинамических расчетов.

Мне доставляет большое удовольствие выразить признательность моим коллегам в этой области, большинство из которых работает в США, за ту щедрость, с которой они обменивались идеями со специалистом из довольно удаленной страны. Я сознаю, что метод развития теории, принятый в настоящей монографии, во многом обязан той пользе, которую я извлек из этих связей. Списки литературы дают некоторое представление об источниках, откуда заимствован ряд фундаментальных результатов, и я надеюсь, что все те, кто способствовал углублению моего труда, найдут свои имена в соответствующих местах текста. Я выражаю мою искреннюю признательность совету Кентерберийского университета за предоставленный мне отпуск для работы над настоящей монографией. В за-

ключение я хотел бы принести мою благодарность проф. Хилтону (Корнельский университет), который на посту руководителя отделения чистой математики Бирмингемского университета предложил мне гостеприимство в своем отделении и обеспечил мне все необходимые удобства.

Дерек Ф. Лоуден

Отделение чистой математики,
Бирмингемский университет

ЛИТЕРАТУРА ¹⁾

- 1*. Канторович Л. В., Функциональный анализ и прикладная математика, *Усп. матем. н.*, вып. 6 (28) (1948).
2. Bellman R., Dreyfus S., An application of dynamic programming to the determination of optimal satellite trajectories, *J. Brit. Interplanet. Soc.*, 17, № 3-4, 78—83 (1959).
3. Kelley H. J., Gradient theory of optimal flight paths, *J. American Rocket Soc.*, 30, № 10, 947—954 (1960).

¹⁾ Здесь и ниже в списке литературы звездочкой обозначаются источники, добавленные переводчиком.

ПРЕДВАРИТЕЛЬНЫЕ ЗАМЕЧАНИЯ

Предполагается, что читатель этой книги знаком с обычным курсом математики, включающим анализ функций действительного переменного и основы теории дифференциальных уравнений. Широко используются методы и результаты вариационного исчисления, но все они изложены в первой главе *ab initio*, так что предварительного знакомства с этой областью математики не требуется. Однако изложенные здесь представления об основных задачах вариационного исчисления и наиболее фундаментальные результаты, без сомнения, делают первую главу полезной для дальнейшего. Читатель, который захочет вначале поближе познакомиться с этим разделом, может воспользоваться любой из многочисленных книг; две из наиболее популярных — монографии Куранта и Гильберта [3] и Фокса [5].

В дополнение к обычной методике дифференцирования сложных функций и неявных функций, заданных системой уравнений, в рассуждениях первой главы важную роль играет теорема, выражающая условия существования неявных функций, заданных системой уравнений. Доказательство этой теоремы читатель может найти в книге Гурса [2].

В ряде мест первой главы (стр. 16, 19, 22 и 32) предполагается существование определенного множества функций. Строгое доказательство этого факта приведено в книге Блисса [1]. В соответствующих местах текста эта книга обозначается именем автора, за которым следует номер страницы, на которую производится ссылка.

От читателя требуется знание механики точки, включая основные соотношения, определяющие ее

движение в поле притягивающей силы, действующей по закону обратной зависимости от квадрата расстояния. Все такие формулы имеются в книгах по небесной механике, в частности у Лоудена [6] и Лурье [4]. В последующем тексте ссылка на книгу [6] обозначается именем автора, за которым следует соответствующий номер страницы.

Дальнейшую информацию, касающуюся предмета настоящей монографии, читатель может почерпнуть в обширном списке литературы, приложенном к обзорной статье Лейтмана [7].

ЛИТЕРАТУРА

1. Блисс Г. А., Лекции по вариационному исчислению, ИЛ, М., 1950.
2. Гурса Е., Курс математического анализа, т. I, ч. I, ГТТИ, М.—Л., 1933.
3. Курант Р., Гильберт Д., Методы математической физики, т. I, гл. 4, Гостехиздат, М.—Л., 1951.
- 4*. Лурье А. И., Аналитическая механика, Физматгиз, М., 1961.
5. Fox C., An introduction to the calculus of variations, London, Oxford, University Press, 1950.
6. Lawden D. F., A course of applied mathematics, vol. 1, London, English University Press, 1961, p. 215.
7. Leitmann G., The optimization of rocket trajectories (a survey), Progress in the Astronautical Sciences, I, Chap. 4, Amsterdam, North-Holland Publishing Co., 1962.

1. ЗАДАЧА МАЙЕРА

1.1. Введение

Настоящая книга посвящена проблеме отыскания траекторий ракет, обеспечивающих выполнение определенного задания наилучшим образом в смысле некоторого количественного критерия. Это задание может иметь как военное (запуск межконтинентальной ракеты), так и научное значение (ракета-носитель выводит контейнер с исследовательской аппаратурой на орбиту вокруг Луны или планеты). Следует ожидать, что уже в недалеком будущем перелеты будут совершаться чаще всего с целью доставки человека на другую планету солнечной системы или за ее пределы. В большинстве случаев желательна оптимизация траектории относительно расхода топлива, так как это позволяет при заданном стартовом весе ракеты обеспечить выведение на орбиту максимального полезного груза. В соответствии с этим указанному случаю будет уделено особое внимание.

Хотя наиболее жесткие требования предъявляются обычно к экономии топлива, легко тем не менее представить себе обстоятельства, когда критерий оптимальности зависит от других факторов. Например, при полете космического корабля с экипажем запасы пищи и других средств жизнеобеспечения пропорциональны полному времени перелета, поэтому может оказаться желательным уменьшить это время ценой дополнительного расхода топлива, чтобы в конечном итоге минимизировать суммарный вес аппарата.

В критерий оптимальности тогда будет входить некоторая комбинация двух величин: массы топлива и времени перелета. Излагаемые ниже методы применимы и к более сложным задачам оптимизации,

однако в настоящей монографии, представляющей собой введение в широкий круг вариационных проблем динамики полета ракет, внимание сосредоточено на простых по математической постановке задачах, чтобы не загромождать особенности методики второстепенными деталями. Следует отметить (это будет видно из дальнейших рассуждений), что уравнения, описывающие участки оптимальной траектории, совершенно не зависят от критерия оптимальности. Поэтому большая часть рассуждений проводится безотносительно к виду критерия.

В настоящей главе математический аппарат излагается в основном с точки зрения его применимости к задачам ракетодинамики, но с равным успехом его можно использовать во многих других областях. В частности, он нашел применение в теории оптимальных процессов систем управления и следящих систем.

В этой связи следует отметить исследования Л. С. Понтрягина, в которых математическая теория оптимальных процессов построена на совершенно иных, неклассических принципах. Изложение такого подхода к вариационным задачам динамики полета можно найти в книгах [1, 2].

1.2. Краткий обзор результатов

В работах Чикала и Миеле [3] и Миеле [4] впервые было отмечено, что задача об оптимальных траекториях ракеты является частным случаем общей математической задачи вариационного исчисления, связанной обычно с именем Майера. Излагаемая в настоящей главе постановка задачи Майера отличается по форме от принятой в монографии Блисса тем, что в уравнения движения (1.1) и связи (1.3) входят некоторые параметры, называемые управляющими функциями, и не входят их производные. Вывод необходимых условий оптимальности проведен в основном аналогично тому, как это сделано у Блисса (стр. 225), с видоизменениями, вызванными введением управляющих функций. Краевые условия (1.2), (1.4) берутся не в таком общем виде, как у Блисса, однако этого

вполне достаточно для наших целей. Совокупность необходимых условий получена на стр. 25, 28, 35, 36.

В гл. 2 общая теория применяется к исследованию ряда проблем, связанных с движением ракеты в околоземном пространстве: к задачам о полете ракеты на максимальную дальность, об оптимальном выведении на орбиту спутника и оптимальных летных данных метеорологической ракеты.

Теория оптимальных траекторий ракеты в произвольном гравитационном поле без учета влияния атмосферы развита в гл. 3. Показано (стр. 72), что условия, которым должна удовлетворять искомая траектория, удобно представить при помощи *функции переключения* κ и *базис-вектора* (primer vector) $\mathbf{p}$, где κ определяет момент перехода от одного режима работы двигателя к другому, а $\mathbf{p}$ — направление тяги. В частном, но практически важном случае, когда предполагаемая тяга двигателя считается неограниченной по величине, все эти условия, как оказывается, можно выразить при помощи одного базис-вектора (стр. 76). Детально рассмотрены задачи оптимизации относительно расхода топлива и полной конечной энергии аппарата (проблема ухода с орбиты).

В гл. 4 рассмотрен упрощенный случай, связанный с заменой гравитационного поля однородным, и показано, что в этом случае можно построить довольно полную теорию. Установлено (стр. 85), что в общем случае траектория может состоять не более чем из трех участков, идущих в определенной последовательности таким образом, что на первом и третьем тяга двигателя максимальна по величине, на втором — равна нулю. Однако при специальном подборе граничных условий тяга двигателя может принимать и промежуточные значения; в этом случае решение не единственно и траектория, состоящая только из участков с максимальной тягой и пассивного участка, всегда допустима (стр. 84).

Участки экстремали, из которых может быть составлена любая оптимальная траектория в ньютоновом поле тяготения (безотносительно к критерию

оптимальности) исследуется в гл. 5. Для каждого из этих участков найден базис-вектор. Полученные результаты используются в заключительной главе для анализа ряда задач о плоских межорбитальных перелетах. Для случая, когда оптимальная траектория включает дугу окружности, а тяга двигателя не ограничена по величине, доказано (стр. 125), что траектория состоит из соприкасающихся в апсидальных точках дуг конических сечений, где тяга прикладывается импульсами по касательной. В частности, детально рассмотрена задача о перелете между двумя круговыми орбитами. Показано, что в случаях, когда отношение радиусов этих орбит не слишком велико (стр. 129), оптимальным является перелет по эллипсу, касательному к обеим окружностям (эллипсу Гомана).

Доказано также (стр. 131), что оптимальный уход с любой орбиты производится только путем импульсного приложения тяги и траектория ухода образована дугами конических сечений, касательных друг к другу в апсидальных точках. В заключение анализируются некоторые особенности двухимпульсного перелета между двумя произвольными компланарными орбитами. Получены уравнения (стр. 138) для определения элементов орбиты перехода в любом частном случае.

1.3. Постановка задачи Майера

В вариационном исчислении рассматриваются проблемы минимизации или максимизации функционалов. *Функционалом* называется величина, зависящая от совокупности значений некоторых функций в областях задания их аргументов. Так, величина I , определенная соотношением

$$I = \int_0^1 f(x) dx,$$

есть функционал, ибо она зависит от значений, принимаемых функцией $f(x)$ на интервале $0 \leq x \leq 1$. Таким образом, функционал является математическим

объектом более сложной природы, чем функция, так как он ставится в соответствие последней и зависит в общем не от конечного числа переменных, а от бесконечной совокупности значений в области ее определения.

Переходим к формулировке задачи Майера. Требуется минимизировать величину, связанную функциональным соответствием с рядом неизвестных функций, которые параметрически входят в заданную систему дифференциальных уравнений.

Пусть задано m функций $\alpha_j(t)$, $j=1, 2, \dots, m$, и n функций $x_i(t)$, $i=1, 2, \dots, n$, удовлетворяющих дифференциальным уравнениям

$$\dot{x}_i = f_i(x_1, \dots, x_n, \alpha_1, \dots, \alpha_m, t), \quad (1.1)$$

где $\dot{x}_i$ обозначает, как обычно, dx_i/dt . Эти уравнения справедливы на отрезке $t_0 \leq t \leq t_1$, а α_j определены на этом интервале как функции, непрерывные всюду, кроме конечного числа точек разрыва. Функции f_i непрерывны по всем своим аргументам и обладают непрерывными частными производными достаточно высокого порядка, а сами производные определены в достаточно широкой области, по отношению к которой все допустимые значения аргументов x_i , α_j и t являются внутренними точками. В момент $t=t_0$ заданы начальные значения

$$x_i = x_{i0}, \quad (1.2)$$

так что функции $x_i(t)$ однозначно определяются уравнениями (1.1) на интервале (t_0, t_1) , как только заданы $\alpha_j(t)$. Определяемые таким образом x_i являются непрерывными функциями t , но их производные могут быть разрывными в точках разрыва α_j .

Будем называть $\alpha_j(t)$ *управляющими функциями*, а $x_i(t)$ — *функциями состояния* (или фазовыми координатами); они могут удовлетворять некоторым уравнениям связи, например

$$g_k(x_1, \dots, x_n, \alpha_1, \dots, \alpha_m, t) = 0, \quad (1.3)$$

где $k=1, 2, \dots, p < m$ и g_k непрерывны и имеют непрерывные частные производные достаточно высокого

порядка по всем аргументам. Кроме того, эти функции должны быть такими, чтобы соответствующие им координаты $x_1, x_2, \dots, x_q$, $q \leq n$, принимали заданные значения при $t=t_1$:

$$x_l = x_{l1}, \quad l = 1, 2, \dots, q. \quad (1.4)$$

В остальном управляющие функции можно выбирать произвольно. Существование управляющих функций, удовлетворяющих условиям (1.3), (1.4), предполагается.

Пусть $x_{q+1,1}, x_{q+2,1}, \dots, x_{n1}$ — значения не связанных условиями (1.4) переменных x_i в момент $t=t_1$. Тогда наша задача заключается в отыскании таких управляющих функций α_j , чтобы порождаемые ими x_i удовлетворяли соотношениям (1.3), (1.4), а заданный функционал

$$J(x_{q+1,1}, x_{q+2,1}, \dots, x_{n1}) \quad (1.5)$$

принимал минимальное значение из возможных.

Задачу нетрудно обобщить на случай, когда t_1 является переменной. В этом случае следует записать

$$J = J(x_{q+1,1}, \dots, x_{n1}, t_1), \quad (1.6)$$

что означает, что J минимизируется также и по t_1 .

Будем предполагать, что функционал J непрерывен по всем своим аргументам и обладает непрерывными частными производными достаточно высокого порядка.

1.4. Допустимые вариации

В общем существует бесконечное множество пар вектор-функций $x_i(t)$, $\alpha_j(t)$, удовлетворяющих уравнениям (1.1)—(1.4), причем каждой паре соответствует некоторая величина J . Предположим, что среди них есть одна, которая доставляет минимальное значение функционалу J . Эту *минимизирующую пару* мы будем впредь обозначать через $x_i(t)$, $\alpha_j(t)$.

Для удобства рассмотрим вначале более широкий класс функций, для которого определен функционал J и который содержит в себе минимизирующую совокупность. Этот класс *допустимых функций* включает

в себя функции, которые удовлетворяют соотношениям (1.1), (1.3), но не обязательно граничным условиям (1.2), (1.4). Предположим, что можно найти однопараметрическое семейство таких допустимых пар, включающее в себя минималь. Этот подкласс допустимых функций обозначим через $x_i(t, \epsilon)$, $\alpha_j(t, \epsilon)$, где ϵ — параметр, причем $\epsilon=0$ соответствует минимали, т. е.

$$x_i(t, 0) = x_i(t), \quad \alpha_j(t, 0) = \alpha_j(t). \quad (1.7)$$

Функции $x_i(t, \epsilon)$, $\dot{x}_i(t, \epsilon)$ и $\alpha_j(t, \epsilon)$ по предположению обладают непрерывными первыми производными по ϵ для всех ϵ , удовлетворяющих $|\epsilon| < \epsilon_0$, и всех t в интервале (t_0, t_1) , а также — для указанного диапазона изменения ϵ и t — свойствами непрерывности по t , оговоренными в разд. 1.3. Для случая переменного t_1 мы будем считать t_1 зависящим от ϵ , приняв в качестве краевого условия для минимали значение $t_1(0) = t_1$.

При подстановке функций

$$x_i = x_i(t, \epsilon), \quad \alpha_j = \alpha_j(t, \epsilon) \quad (1.8)$$

в уравнения (1.1) последние удовлетворяются по t и ϵ тождественно. Отсюда, дифференцируя обе части по ϵ , получаем выражения

$$\frac{\partial^2 x_l}{\partial \epsilon \partial t} = \frac{\partial f_l}{\partial x_r} \frac{\partial x_r}{\partial \epsilon} + \frac{\partial f_l}{\partial \alpha_j} \frac{\partial \alpha_j}{\partial \epsilon}, \quad (1.9)$$

оба члена в правой части которых следует понимать как суммы по $r(1, 2, \dots, n)$ и $j(1, 2, \dots, m)$ соответственно, согласно известному правилу суммирования по повторяющемуся индексу. Это правило будет неоднократно использоваться в дальнейшем, поэтому установим диапазоны дискретного изменения буквенных индексов, используемых в настоящей главе:

$$\left. \begin{aligned} i &= 1, 2, \dots, n; & j &= 1, 2, \dots, m; \\ & & k &= 1, 2, \dots, p; \\ l &= 1, 2, \dots, q; & r &= 1, 2, \dots, n; \\ & & s &= q+1, q+2, \dots, n; \\ t &= p+1, p+2, \dots, m. \end{aligned} \right\} \quad (1.10)$$

Полагая в (1.9) $\varepsilon=0$, можно записать

$$\dot{y}_i = \frac{\partial f_i}{\partial x_r} y_r + \frac{\partial f_i}{\partial \alpha_j} \beta_j, \quad (1.11)$$

где

$$y_i(t) = \left(\frac{\partial x_i}{\partial \varepsilon} \right)_{\varepsilon=0}, \quad \beta_j(t) = \left(\frac{\partial \alpha_j}{\partial \varepsilon} \right)_{\varepsilon=0} \quad (1.12)$$

и аргументы $\partial f_i / \partial x_r$, $\partial f_i / \partial \alpha_j$ суть функции $x_i(t)$, $\alpha_j(t)$ из минимизирующей пары. Функции y_i , β_j обладают свойствами непрерывности функций x_i , α_j соответственно и называются *вариациями* минимизирующей пары относительно рассматриваемого семейства.

Подставляя аналогичным образом соотношения (1.8) в уравнения связей (1.3) и дифференцируя затем их по ε , получаем

$$\frac{\partial g_k}{\partial x_i} \frac{\partial x_i}{\partial \varepsilon} + \frac{\partial g_k}{\partial \alpha_j} \frac{\partial \alpha_j}{\partial \varepsilon} = 0. \quad (1.13)$$

Полагая $\varepsilon=0$, приводим (1.13) к виду

$$\frac{\partial g_k}{\partial x_i} y_i + \frac{\partial g_k}{\partial \alpha_j} \beta_j = 0, \quad (1.14)$$

где $\partial g_k / \partial x_i$, $\partial g_k / \partial \alpha_j$ снова берутся на минимали.

Таким образом, из сказанного следует, что однопараметрическое семейство допустимых систем функций должно быть таким, что его вариации обращают уравнения (1.11) и (1.14) в тождества в любой момент времени t . Мы, напротив, будем полагать, что если уравнения (1.11), (1.14) разрешимы относительно некоторой системы функций $y_i(t)$, $\beta_j(t)$, то можно найти однопараметрическое семейство допустимых систем, включающее минималь, вариациями которого являются $y_i(t)$, $\beta_j(t)$. Доказательство этой *теоремы включения* можно найти в книге Бласса (стр. 233). Такую совокупность функций $y_i(t)$, $\beta_j(t)$ будем называть *допустимыми вариациями* минимали $x_i(t)$, $\alpha_j(t)$.

1.5. Первая вариация J

Составляя J согласно (1.6) для элементов семейства допустимых пар, получаем его в зависимости от параметра ε . Величина $\partial J / \partial \varepsilon$ при $\varepsilon=0$ носит название

первой вариации J относительно семейства и обозначается так:

$$\left(\frac{dJ}{d\varepsilon} \right)_{\varepsilon=0} = J_1. \quad (1.15)$$

Подставляя

$$x_{s1} = x_s[t_1(\varepsilon), \varepsilon], \quad t_1 = t_1(\varepsilon), \quad (1.16)$$

в уравнения (1.6) и дифференцируя их по ε , получаем

$$\frac{dJ}{d\varepsilon} = \frac{\partial J}{\partial x_{s1}} \left(\frac{\partial x_s}{\partial t_1} \frac{dt_1}{d\varepsilon} + \frac{\partial x_s}{\partial \varepsilon} \right) + \frac{\partial J}{\partial t_1} \frac{dt_1}{d\varepsilon}. \quad (1.17)$$

Полагая здесь $\varepsilon=0$, получаем

$$J_1 = \frac{\partial J}{\partial x_{s1}} (\dot{x}_{s1} u_1 + y_{s1}) + \frac{\partial J}{\partial t_1} u_1, \quad (1.18)$$

где

$$u_1 = \left(\frac{dt_1}{d\varepsilon} \right)_{\varepsilon=0} \quad (1.19)$$

и частные производные J берутся на минимали. Назовем u_1 *вариацией конечной точки*.

Преобразуем выражение (1.18) к виду, более удобному для дальнейших рассуждений. С этой целью введем некоторые вспомогательные функции $\lambda_i(t)$, $\mu_k(t)$, которые будут определены ниже, и величину F , заданную соотношением

$$F = -\lambda_i \dot{f}_i + \mu_k g_k. \quad (1.20)$$

Это вспомогательное выражение впервые использовал Лагранж при рассмотрении задачи на максимум и минимум функции конечного числа переменных с наложенными на нее ограничениями. В соответствии с этим F называется *функцией Лагранжа*, а λ_i , μ_k — *множителями Лагранжа*. Тогда имеет место соотношение

$$\begin{aligned} \int_{t_0}^{t_1} \left[\lambda_i \left\{ \dot{y}_i - \frac{\partial f_i}{\partial x_r} y_r - \frac{\partial f_i}{\partial a_j} \beta_j \right\} + \mu_k \left\{ \frac{\partial g_k}{\partial x_r} y_r + \frac{\partial g_k}{\partial a_j} \beta_j \right\} \right] dt = \\ = \int_{t_0}^{t_1} \left[\lambda_i \dot{y}_i + \frac{\partial F}{\partial x_i} y_i + \frac{\partial F}{\partial a_j} \beta_j \right] dt, \quad (1.21) \end{aligned}$$

в силу (1.11), (1.14) равное тождественно нулю для всех допустимых вариаций на минимали.

Будем предполагать, что множители Лагранжа непрерывны всюду, за исключением конечного числа точек разрыва первого рода. Интегрируя по частям, получаем

$$\int_{t_0}^{t_1} \frac{\partial F}{\partial x_i} y_i dt = [y_i G_i]_{t_0}^{t_1} - \int_{t_0}^{t_1} \dot{y}_i G_i dt, \quad (1.22)$$

где

$$G_i = \int_{t_0}^t \frac{\partial F}{\partial x_i} dt. \quad (1.23)$$

Выражение (1.21), очевидно, приводится к виду

$$y_{i1} \int_{t_0}^{t_1} \frac{\partial F}{\partial x_i} dt + \int_{t_0}^{t_1} \left\{ (\lambda_i - G_i) \dot{y}_i + \frac{\partial F}{\partial \alpha_j} \beta_j \right\} dt. \quad (1.24)$$

Выберем теперь n множителей λ_i , удовлетворяющих уравнению

$$\lambda_i = \int_{t_0}^t \frac{\partial F}{\partial x_i} dt + \lambda_{i0}, \quad (1.25)$$

где λ_{i0} — константы, которые следует определить. Как доказано в книге Блисса (стр. 237), уравнения (1.25) однозначно определяют λ_i на интервале $[t_0, t_1]$, коль скоро заданы λ_{i0} . Найденные таким образом λ_i непрерывны всюду, за исключением точек разрыва α_j , и не обращаются в нуль одновременно при любых значениях t . Выберем p множителей μ_k , чтобы удовлетворить p уравнениям

$$\frac{\partial F}{\partial \alpha_k} = 0, \quad k = 1, 2, \dots, p < m. \quad (1.26)$$

Для этого необходимо, чтобы определитель, составленный из коэффициентов при μ_k в этих уравнениях, был отличен от нуля, т. е. чтобы имело место

$$\left| \frac{\partial g_h}{\partial \alpha_k} \right| \neq 0, \quad (1.27)$$

где h также пробегает значения $1, 2, \dots, p$. В случае, когда указанное условие не удовлетворяется, связи (1.3) не являются независимыми. Будем предполагать, что это условие выполнено. Тогда при указанном выборе множителей Лагранжа выражение (1.24) приводится к виду

$$\begin{aligned} y_{11}(\lambda_{11} - \lambda_{10}) + \int_{t_0}^{t_1} \lambda_{10} \dot{y}_1 dt + \int_{t_0}^{t_1} \frac{\partial F}{\partial \alpha_t} \beta_t dt = \\ = y_{11} \lambda_{11} - y_{10} \lambda_{10} + \int_{t_0}^{t_1} \frac{\partial F}{\partial \alpha_t} \beta_t dt, \quad (1.28) \end{aligned}$$

где индекс t принимает значения $p+1, p+2, \dots, m$ и $\lambda_{i1} = \lambda_i(t_1)$.

Пусть γ_0 — константа, которую определим позднее. Тогда выражение (1.28), тождественно равное нулю для всех допустимых вариаций, можно сложить с $\gamma_0 J_1$ с учетом соотношения (1.18), что дает

$$\begin{aligned} \gamma_0 J_1 = \gamma_0 \left\{ \frac{\partial J}{\partial x_{s1}} (\dot{x}_{s1} u_1 + y_{s1}) + \frac{\partial J}{\partial t_1} u_1 \right\} + \\ + y_{11} \lambda_{11} - y_{10} \lambda_{10} + \int_{t_0}^{t_1} \frac{\partial F}{\partial \alpha_t} \beta_t dt. \quad (1.29) \end{aligned}$$

Это выражение и является требуемым преобразованным выражением для первой вариации.

1.6. Первые необходимые условия минимума J

Пусть $y_i^{(\sigma)}(t)$, $\beta_j^{(\sigma)}(t)$, $u_1^{(\sigma)}$, где $\sigma = 1, 2, \dots, q+n+1 = N$, есть N систем допустимых вариаций, каждая из которых удовлетворяет уравнениям (1.11), (1.14). Допустим, что можно отыскать N -параметрическое семейство допустимых пар вектор-функций $x_i(t, \epsilon_1, \epsilon_2, \dots, \epsilon_N)$, $\alpha_j(t, \epsilon_1, \epsilon_2, \dots, \epsilon_N)$, из которого минимизирующая пара (минималь) выделяется заданием нулевых значений параметров $\epsilon_1 = \epsilon_2 = \dots = \epsilon_N = 0$, причем вариации указанных вектор-функций по каждому

параметру ε_σ суть $y_l^{(\sigma)}(t)$, $\beta_j^{(\sigma)}(t)$, т. е.

$$\frac{\partial x_l}{\partial \varepsilon_\sigma} = y_l^{(\sigma)}, \quad \frac{\partial a_j}{\partial \varepsilon_\sigma} = \beta_j^{(\sigma)}, \quad (1.30)$$

где $\varepsilon_1 = \varepsilon_2 = \dots = \varepsilon_N = 0$. Строгое доказательство читатель может найти у Блисса (стр. 235). Примем также, что t_1 зависит от параметров ε_σ таким образом, что

$$\frac{\partial t_1}{\partial \varepsilon_\sigma} = u_1^{(\sigma)}, \quad (1.31)$$

когда все ε_σ равны нулю. При подстановке функций из этого семейства J становится функцией ε_σ , принимающей свое минимальное значение J_0 при нулевых значениях всех параметров. Запишем

$$J(\varepsilon_1, \varepsilon_2, \dots, \varepsilon_N) = J_0 + U. \quad (1.32)$$

Условия того, что элемент семейства должен удовлетворять краевым условиям (1.2), (1.4), имеют вид

$$x_l(t_0, \varepsilon_\sigma) = x_{l0}, \quad x_l[t_1(\varepsilon_\sigma), \varepsilon_\sigma] = x_{l1}, \quad (1.33)$$

где ε_σ — вся совокупность параметров $\varepsilon_1, \varepsilon_2, \dots, \varepsilon_N$. Для любых значений параметров, удовлетворяющих условиям (1.33), U должно быть положительным, так как при этих условиях J_0 есть минимальное значение величины J . Однако при $U=0$ уравнения (1.32), (1.33), как известно, имеют решение $\varepsilon_1 = \varepsilon_2 = \dots = \varepsilon_N = 0$. Согласно известным теоремам о неявных функциях, уравнения (1.32), (1.33) определяют ε_σ как непрерывные функции U в окрестности $U=0$, причем $\varepsilon_\sigma(0) = 0$ ($\sigma = 1, 2, \dots, N$), при условии что определитель

$$\Delta = \begin{vmatrix} \frac{\partial J}{\partial \varepsilon_1} & \frac{\partial J}{\partial \varepsilon_2} & \dots & \frac{\partial J}{\partial \varepsilon_N} \\ \frac{\partial x_{l0}}{\partial \varepsilon_1} & \frac{\partial x_{l0}}{\partial \varepsilon_2} & \dots & \frac{\partial x_{l0}}{\partial \varepsilon_N} \\ \frac{\partial x_{l1}}{\partial \varepsilon_1} & \frac{\partial x_{l1}}{\partial \varepsilon_2} & \dots & \frac{\partial x_{l1}}{\partial \varepsilon_N} \end{vmatrix} \quad (1.34)$$

не обращается в нуль при $\varepsilon_1 = \varepsilon_2 = \dots = \varepsilon_N = 0$. Это означает, что существуют значения ε_σ , при которых

удовлетворяются краевые условия (1.2), (1.4) и которые, помимо этого, приводят к отрицательным значениям U . Последнее невозможно, следовательно, Δ должен обращаться в нуль, когда $\varepsilon_1 = \varepsilon_2 = \dots = \varepsilon_N = 0$.

С этой точки зрения Δ всюду ниже будет означать определитель (1.34) при нулевых значениях параметров ε_σ . Пусть $R (< N)$ — максимальный ранг детерминанта Δ для некоторых N систем допустимых вариаций. Предположим, что Δ имеет указанный ранг для вариаций $y_i^{(\sigma)}(t)$, $\beta_j^{(\sigma)}(t)$, $u_1^{(\sigma)}$. Тогда из Δ можно выбрать R линейно независимых столбцов. Перенумеруем столбцы таким образом, чтобы линейно независимыми стали первые R столбцов. Так как строки детерминанта Δ линейно зависимы, всегда можно найти не равные нулю одновременно числа $\gamma_0, \gamma_1, \dots, \gamma_n, \nu_1, \nu_2, \dots, \nu_q$, такие, что

$$\gamma_0 \frac{\partial J}{\partial \varepsilon_\sigma} + \gamma_l \frac{\partial x_{l0}}{\partial \varepsilon_\sigma} + \nu_l \frac{\partial x_{l1}}{\partial \varepsilon_\sigma} = 0 \quad (1.35)$$

при $\sigma = 1, 2, \dots, R$. Пусть $y_i(t)$, $\beta_j(t)$, u_1 — общая система допустимых вариаций. Заменяем одну из систем допустимых вариаций, соответствующую столбцу детерминанта Δ с номером, большим R , указанной новой системой. Замененный столбец обозначим так:

$$\left\{ \frac{\partial J}{\partial \varepsilon}, \frac{\partial x_{l0}}{\partial \varepsilon}, \frac{\partial x_{l1}}{\partial \varepsilon} \right\}, \quad (1.36)$$

где ε — параметр, соответствующий новому множеству допустимых вариаций. После этого ранг Δ останется равным R , поскольку это его максимальный ранг и всегда найдется R линейно независимых столбцов. Отсюда следует, что столбец (1.36) линейно зависит от первых R столбцов Δ и что, согласно (1.35),

$$\gamma_0 \frac{\partial J}{\partial \varepsilon} + \gamma_l \frac{\partial x_{l0}}{\partial \varepsilon} + \nu_l \frac{\partial x_{l1}}{\partial \varepsilon} = 0. \quad (1.37)$$

Это уравнение должно выполняться для любой системы допустимых вариаций.

Дифференцируя левые части соотношений (1.33) по ε и полагая в них значения всех параметров

равными нулю, находим

$$\frac{\partial x_{i0}}{\partial \varepsilon} = y_{i0}, \quad (1.38)$$

$$\frac{\partial x_{i1}}{\partial \varepsilon} = \dot{x}_{i1} u_1 + y_{i1}. \quad (1.39)$$

Подставляя (1.38), (1.39), а также значения $\gamma_0 J_1 = \gamma_0 \partial J / \partial \varepsilon$ из уравнения (1.29) в условие (1.37), запишем его в форме

$$\begin{aligned} & (\gamma_i - \lambda_{i0}) y_{i0} + (v_i + \lambda_{i1}) y_{i1} + \left(\gamma_0 \frac{\partial J}{\partial x_{s1}} + \lambda_{s1} \right) y_{s1} + \\ & + \left(\gamma_0 \frac{\partial J}{\partial x_{s1}} \dot{x}_{s1} + \gamma_0 \frac{\partial J}{\partial t_1} + v_i \dot{x}_{i1} \right) u_1 + \int_{t_0}^{t_1} \frac{\partial F}{\partial a_t} \beta_t dt = 0. \end{aligned} \quad (1.40)$$

Выберем теперь константы λ_{i0} (которые пока находятся в нашем распоряжении) таким образом, чтобы коэффициенты при y_{i0} в условии (1.10) обратились в нуль. Отсюда получим

$$\lambda_{i0} = \gamma_i. \quad (1.41)$$

Значения y_{i1} в условии (1.40) можно выбрать произвольно, так как уравнения (1.11) всегда могут быть удовлетворены функциями $y_i(t)$, принимающими любые заданные значения при $t=t_1$. Далее, p функций $\beta_1, \beta_2, \dots, \beta_p$ можно полностью определить из p уравнений (1.14) после того, как каким-то образом заданы функции $\beta_{p+1}, \beta_{p+2}, \dots, \beta_m$. Наконец, величину u_1 также можно выбрать без всяких ограничений. Отсюда следует, что условие (1.40) может выполняться для всех допустимых вариаций только тогда, когда коэффициенты этих произвольных величин обращаются в нуль, т. е. если имеют место соотношения

$$v_i = -\lambda_{i1}, \quad (1.42)$$

$$\gamma_0 \frac{\partial J}{\partial x_{s1}} = -\lambda_{s1}, \quad (1.43)$$

$$\gamma_0 \frac{\partial J}{\partial t_1} + \gamma_0 \frac{\partial J}{\partial x_{s1}} \dot{x}_{s1} + v_i \dot{x}_{i1} = 0, \quad (1.44)$$

$$\frac{\partial F}{\partial a_t} = 0. \quad (1.45)$$

Исключая v_i из уравнений (1.42), (1.44) и подставляя (1.43) в уравнение (1.44), приводим эти условия к виду

$$\lambda_{s1} = -\gamma_0 \frac{\partial J}{\partial x_{s1}}, \quad (1.46)$$

$$\lambda_{11} \dot{x}_{11} = \gamma_0 \frac{\partial J}{\partial t_1} \quad (1.47)$$

плюс уравнение (1.45).

Итак, минимизирующая система функций обязана удовлетворять следующим необходимым условиям: множители Лагранжа λ_i , μ_k должны удовлетворять *характеристическим уравнениям*

$$\lambda_i = \int_{t_0}^t \frac{\partial F}{\partial x_i} dt + \lambda_{i0}, \quad (1.48)$$

$$0 = \frac{\partial F}{\partial \alpha_j} \quad (1.49)$$

и, кроме того, конечным условиям (1.46), (1.47). Вместе с (1.1), (1.3) уравнения (1.48), (1.49) образуют систему $2n+m+p$ уравнений для определения $2n+m+p$ функций $x_i(t)$, $\alpha_j(t)$, $\lambda_i(t)$, $\mu_k(t)$. Зависимости (1.2), (1.4), (1.46) и (1.47) служат $2n+1$ краевыми условиями для нахождения n констант λ_{i0} , n постоянных интегрирования дифференциальных уравнений (1.1) и конечной величины t_1 .

В точках, где α_j непрерывны, характеристические уравнения (1.48) эквивалентны дифференциальным уравнениям

$$\dot{\lambda}_i = \frac{\partial F}{\partial x_i}. \quad (1.50)$$

Если минимизация проводится без учета вариации конечной точки t_1 , величина последней задана, вследствие чего в уравнении (1.40) $u_1=0$ и условие (1.47) более неприменимо.

Если приведенные выше необходимые условия удовлетворяются при $\gamma_0=0$, результирующее решение называется *анормальным*. В случае *нормального* решения $\gamma_0 \neq 0$ и, не теряя общности, можно принять $\gamma_0=1$,

поскольку левую часть уравнения (1.35) в этом случае можно разделить на γ_0 и ввести вместо множителей γ_i , ν_i отношения γ_i/γ_0 и ν_i/γ_0 соответственно.

1.7. Условия Вейерштрасса — Эрдмана для угловых точек

В этом разделе мы будем изучать условия, которым удовлетворяет минимизирующее семейство функций в точке разрыва $t=a$ некоторых или всех функций $\alpha_j(t)$.

Как было отмечено выше, в такой точке функции $x_i(t)$ будут оставаться непрерывными, но их производные $\dot{x}_i$ могут терпеть разрыв. Функция Лагранжа F может быть разрывной, следовательно, ее частные производные $\partial F/\partial x_i$, $\partial F/\partial \alpha_j$ также могут быть разрывными. Однако, как следует из (1.25), множители λ_i тем не менее будут непрерывными. Уравнения (1.26) определяют остальные множители μ_k и очевидно, что эти функции могут терпеть разрыв при $t=a$.

Также ясно, что при разрыве указанного типа, имеющем место на минимали в момент $t=a$, J должен принимать минимальное значение по отношению к малым вариациям положения точки разрыва на интервале $[t_0, t_1]$. Используя это свойство, можно найти дополнительное необходимое условие, которое должно выполняться в случае разрыва. Для проведения доказательства целесообразнее переформулировать задачу в *параметрическом виде*.

Допустим, что переменная t зависит от параметра θ таким образом, что при возрастании θ от θ_0 до θ_1 переменная t изменяется в пределах от t_0 до t_1 . Тогда функции $x_i(t)$, $\alpha_j(t)$ перейдут в функции от θ , которые мы обозначим через $X_i(\theta)$, $A_j(\theta)$ соответственно. Связи (1.1), (1.3) эквивалентны уравнениям

$$X'_i = T f_i(X_1, \dots, X_n, A_1, \dots, A_m, t), \quad (1.51)$$

$$t' = T, \quad (1.52)$$

$$g_k(X_1, \dots, X_n, A_1, \dots, A_m, t) = 0, \quad (1.53)$$

где $T = T(\theta)$ и штрих означает дифференцирование по θ . Граничные условия (1.2), (1.4) дают аналогичные

соотношения

$$X_l = x_{l0} \quad (1.54)$$

и

$$X_l = x_{l1}, \quad (1.55)$$

которые должны выполняться при $\theta = \theta_0$ и $\theta = \theta_1$ соответственно. Задача теперь состоит в том, чтобы выбрать управляющие функции $A_1, A_2, \dots, A_m, T$ таким образом, чтобы получаемые из уравнений (1.51), (1.52) функции $X_1, X_2, \dots, X_n, t$ удовлетворяли связям (1.53), а функционал

$$J(X_{q+1,1}, X_{q+2,1}, \dots, X_{n1}, t_1) \quad (1.56)$$

принимал минимальное значение из возможных. Подобная проблема изучена в предыдущем разделе, и для ее решения применимы полученные выше результаты. Однако, поскольку t является теперь произвольной функцией параметра θ , положение любой точки разрыва управляющих функций на интервале $[t_0, t_1]$ может быть откорректировано вариацией этой функции и, следовательно, автоматически выбрано оптимальным образом с помощью изложенной в предыдущих разделах процедуры.

Функция Лагранжа для данного случая дается выражением

$$\Phi = -\lambda_l T f_l - \lambda_{n+1} T + \mu_k T g_k, \quad (1.57)$$

где связи (1.53) для удобства умножены на $T > 0$ (так как t монотонно возрастает). Немедленно можно заметить, что новые множители Лагранжа, как подсказывают уже сами обозначения, идентичны старым, если множество последних расширить, добавив к ним λ_{n+1} . Таким образом, для задачи в этой новой форме характеристическое уравнение (1.48) запишется следующим образом:

$$\begin{aligned} \lambda_l &= \int_{\theta_0}^{\theta} \frac{\partial \Phi}{\partial X_l} d\theta + \lambda_{l0} = \int_{\theta_0}^{\theta} \left(-\lambda_r \frac{\partial f_r}{\partial X_l} + \mu_k \frac{\partial g_k}{\partial X_l} \right) T d\theta + \lambda_{l0} = \\ &= \int_{t_0}^t \frac{\partial F}{\partial x_l} dt + \lambda_{l0}, \quad (1.58) \end{aligned}$$

где на заключительном этапе мы перешли к первоначальным переменным под интегралом. Эти уравнения тождественны (1.48) для первоначально поставленной задачи. Соотношение для нового множителя λ_{n+1} находится аналогично:

$$\lambda_{n+1} = \int_{t_0}^t \frac{\partial F}{\partial t} dt + \lambda_{n+1,0}. \quad (1.59)$$

В новой форме можно записать также уравнения (1.49):

$$\frac{\partial \Phi}{\partial A_j} = 0, \quad \frac{\partial \Phi}{\partial T} = 0. \quad (1.60)$$

Легко проверить, что они эквивалентны следующим уравнениям:

$$\frac{\partial F}{\partial a_j} = 0, \quad F - \lambda_{n+1} = 0. \quad (1.61)$$

Исключив λ_{n+1} из (1.59), (1.61), получим

$$F = \int_{t_0}^t \frac{\partial F}{\partial t} dt + \text{const.} \quad (1.62)$$

Следовательно, мы снова пришли к уравнениям (1.48), (1.49), найдя дополнительное соотношение (1.62). В области непрерывности уравнение (1.62) эквивалентно дифференциальному уравнению

$$\frac{\partial F}{\partial t} = \frac{dF}{dt}, \quad (1.63)$$

которое, как будет показано в следующем разделе, следует из (1.48), (1.49) и, таким образом, не является независимым условием. Однако в точке разрыва соотношение (1.62) указывает на непрерывность функции F и является новым условием. Так как на оптимальной траектории $g_k = 0$ и $\dot{f}_i = \dot{x}_i$, из нового условия следует, что величина

$$\lambda_i \dot{x}_i \quad (1.64)$$

должна быть непрерывной.

Подведем итоги: в точке разрыва (*угловой точке*, согласно терминологии вариационного исчисления) множители λ_i и выражение $\lambda_i \dot{x}_i$ должны быть непрерывны. Эти *угловые условия* для других задач вариационного исчисления были открыты независимо Эрдманом и Вейерштрассом.

1.8. Первый интеграл

На минимальной траектории F можно выразить как функцию единственного переменного t . Найдя полную производную функции (1.20) по t , получим для всех неугловых точек

$$\begin{aligned} \frac{dF}{dt} &= -\dot{\lambda}_i f_i - \lambda_i \frac{\partial f_i}{\partial x_r} \dot{x}_r - \lambda_i \frac{\partial f_i}{\partial a_j} \dot{a}_j - \lambda_i \frac{\partial f_i}{\partial t} + \\ &+ \dot{\mu}_k g_k + \mu_k \frac{\partial g_k}{\partial x_r} \dot{x}_r + \mu_k \frac{\partial g_k}{\partial a_j} \dot{a}_j + \mu_k \frac{\partial g_k}{\partial t} = \\ &= -\frac{\partial F}{\partial x_i} \dot{x}_i + \frac{\partial F}{\partial x_r} \dot{x}_r + \frac{\partial F}{\partial a_j} \dot{a}_j + \frac{\partial F}{\partial t}, \quad (1.65) \end{aligned}$$

так как на минимальной траектории g_k тождественно равны нулю и справедливо уравнение (1.50). В силу (1.1), (1.49) зависимость (1.65) приводится к виду (1.63).

В частности, если функции f_i , g_k не зависят явно от t , то $\partial F/\partial t = 0$ и уравнение (1.63) дает первый интеграл

$$F = \text{const.} \quad (1.66)$$

Так как $g_k = 0$, $f_i = \dot{x}_i$, этот интеграл можно записать в виде

$$\lambda_i \dot{x}_i = c (\text{const}), \quad (1.67)$$

причем константа c должна быть одной и той же на всей минимальной траектории, поскольку, как доказано в предыдущем разделе, выражение $\lambda_i \dot{x}_i$ непрерывно в угловой точке.

1.9. Второе необходимое условие минимума J

В разд. 1.4 был определен класс допустимых вектор-функций, включающих в себя совокупность минимизирующих функций, в разд. 1.6 — подкласс допустимых вектор-функций, удовлетворяющих краевым условиям (1.2), (1.4). Здесь были установлены необходимые условия, которым удовлетворяет элемент, минимизирующий функционал J . Было введено понятие вариаций минимизирующей системы функций на множестве допустимых функций; вариации этого типа называются в вариационном исчислении *слабыми вариациями*. В этом разделе путем расширения класса допустимых систем функций новыми элементами, не включенными в рассмотренный ранее класс, будет установлено второе необходимое условие минимума J , принадлежащее Вейерштрассу. Вариации относительно этого расширенного класса называются *сильными вариациями*.

Приняв $N = n + q + 1$, определим N -параметрическое семейство допустимых систем функций x_i, α_j с параметрами $\varepsilon_1, \varepsilon_2, \dots, \varepsilon_{N-1}, \delta$ следующим образом:

$$\left. \begin{aligned} x_i &= x_i(t, \varepsilon_1, \dots, \varepsilon_{N-1}), \\ \alpha_j &= \alpha_j(t, \varepsilon_1, \dots, \varepsilon_{N-1}), \quad t_0 \leq t \leq T, \\ x_i &= X_i(t, \varepsilon_1, \dots, \varepsilon_{N-1}), \\ \alpha_j &= A_j(t, \varepsilon_1, \dots, \varepsilon_{N-1}), \quad T \leq t \leq T + \delta, \\ x_i &= x_i(t, \varepsilon_1, \dots, \varepsilon_{N-1}, \delta), \\ \alpha_j &= \alpha_j(t, \varepsilon_1, \dots, \varepsilon_{N-1}, \delta), \quad T + \delta \leq t \leq t_1, \end{aligned} \right\} \quad (1.68)$$

где для каждого набора значений параметров x_i непрерывны по t на всем интервале $[t_0, t_1]$ и правые части этих уравнений удовлетворяют связям (1.1) и (1.3). Однако $\dot{x}_i, \alpha_j$ могут иметь конечное число разрывов по t . В каждом из трех интервалов $[t_0, T]$, $[T, T + \delta]$, $[T + \delta, t_1]$ функции $x_i, \dot{x}_i, \alpha_j$ обладают первыми частными производными по каждому параметру и непрерывны по всем своим аргументам $t, \varepsilon_1, \dots, \varepsilon_{N-1}, \delta$. В остальном правые части уравнений (1.68) произвольны. Минимизирующая система функций выби-

рается так, чтобы ей соответствовал набор из нулевых значений параметров. Будем предполагать, что в этом случае $t=T$ не является угловой точкой. Однако, поскольку α_j могут быть разрывными при $t=T$ для тех элементов семейства, у которых $\delta \neq 0$, эта точка может быть угловой для общего элемента семейства. Для семейства допустимых вектор-функций, определенного ранее, точка может оказаться угловой точкой общего элемента семейства только в том случае, если она является угловой точкой минимали. Таким образом, новое семейство допустимых функций принадлежит более широкому классу по сравнению с рассмотренным выше.

Чтобы допустить вариацию конечной точки t_1 , будем рассматривать ее как функцию $n+q$ параметров ε_σ (но не функцию δ).

Из семейства систем допустимых функций выберем однопараметрическую систему функций, удовлетворяющих конечным условиям (1.2) и (1.4). Эти $N-1$ соотношений служат для определения $N-1$ параметров $\varepsilon_1, \varepsilon_2, \dots, \varepsilon_{N-1}$ в зависимости от параметра δ :

$$\varepsilon_\sigma = \varepsilon_\sigma(\delta), \quad \sigma = 1, 2, \dots, N-1, \quad (1.69)$$

где, очевидно, $\varepsilon_\sigma(0) = 0$ соответствует минимизирующей системе, которая, конечно, удовлетворяет указанным краевым значениям. Для того чтобы из краевых условий можно было найти ε_σ в зависимости от δ , необходимо, чтобы якобиан

$$\frac{\partial(x_{10}, x_{20}, \dots, x_{n0}, x_{11}, x_{21}, \dots, x_{q1})}{\partial(\varepsilon_1, \varepsilon_2, \dots, \varepsilon_{n+q})} \quad (1.70)$$

был отличен от нуля для системы нулевых значений параметров. Как показано в книге Блисса (стр. 254), для случая, когда минимизирующая система нормальна, всегда можно найти N -параметрическое семейство, для которого это условие выполняется. Подставляя (1.69) в (1.68), получаем однопараметрическое семейство допустимых систем функций, удовлетворяющих краевым условиям.

Величина δ служит параметром этого семейства, причем минимизирующая система является элементом того же семейства при $\delta=0$.

Если теперь подставить это однопараметрическое семейство в краевые условия (1.2) и (1.4) и продифференцировать получившееся тождество относительно δ по δ , можно получить

$$\frac{\partial x_{i0}}{\partial \varepsilon_\sigma} \frac{d\varepsilon_\sigma}{d\delta} = 0, \quad (1.71)$$

$$\frac{\partial x_{i1}}{\partial \varepsilon_\sigma} \frac{d\varepsilon_\sigma}{d\delta} + \frac{\partial x_{i1}}{\partial \delta} = 0. \quad (1.72)$$

Заметим, что x_{i0} не зависят от δ , так что $\partial x_{i0}/\partial \delta$ не входят в (1.71).

Подставляя (1.68) в (1.6), можно найти J как функцию от N параметров $\varepsilon_\sigma, \delta$. Последующая подстановка соотношений (1.69) позволяет выразить J на однопараметрическом семействе как функцию только одного δ . Отсюда

$$J(\delta) = J[\varepsilon_1(\delta), \varepsilon_2(\delta), \dots, \varepsilon_{n+q}(\delta), \delta]. \quad (1.73)$$

Дифференцируя (1.73) по δ , находим

$$\frac{dJ}{d\delta} = \frac{\partial J}{\partial \varepsilon_\sigma} \frac{d\varepsilon_\sigma}{d\delta} + \frac{\partial J}{\partial \delta}. \quad (1.74)$$

При $\delta=0$ множество допустимых систем функций, определяемых соотношениями (1.68), принадлежит к рассмотренному в разд. 1.6 типу. Следовательно, изложенные там рассуждения остаются в силе и, в частности, имеют место уравнения (1.35). Полагая в них $\gamma_0=1$ (поскольку минималь предполагается нормальной), получаем

$$\frac{\partial J}{\partial \varepsilon_\sigma} = -\gamma_i \frac{\partial x_{i0}}{\partial \varepsilon_\sigma} - v_i \frac{\partial x_{i1}}{\partial \varepsilon_\sigma}, \quad (1.75)$$

где все параметры положены равными нулю.

Аналогично

$$\frac{\partial J}{\partial \delta} = \frac{\partial J}{\partial x_{s1}} \frac{\partial x_{s1}}{\partial \delta}. \quad (1.76)$$

Однако при нулевых значениях всех параметров (т. е. на минимали) справедливо (1.46), откуда

$$\frac{\partial J}{\partial \delta} = -\lambda_{s1} \frac{\partial x_{s1}}{\partial \delta} = -v_l \frac{\partial x_{l1}}{\partial \delta} - \lambda_{l1} \frac{\partial x_{l1}}{\partial \delta}, \quad (1.77)$$

причем последнее преобразование выполнено с учетом уравнения (1.42).

Вычислим теперь $dJ/d\delta$ при нулевых значениях параметров. Подставляя (1.75) и (1.77) в (1.74), находим с учетом (1.71) и (1.72)

$$\begin{aligned} \frac{dJ}{d\delta} = & -v_l \frac{\partial x_{l0}}{\partial \varepsilon_\sigma} \frac{d\varepsilon_\sigma}{d\delta} - v_l \left(\frac{\partial x_{l1}}{\partial \varepsilon_\sigma} \frac{d\varepsilon_\sigma}{d\delta} + \frac{\partial x_{l1}}{\partial \delta} \right) - \\ & - \lambda_{l1} \frac{\partial x_{l1}}{\partial \delta} = -\lambda_{l1} \frac{\partial x_{l1}}{\partial \delta}. \end{aligned} \quad (1.78)$$

На однопараметрическом семействе минимальному значению J соответствует $\delta=0$. Отрицательные значения δ невозможны, откуда следует, что J — неубывающая функция от δ при $\delta=0$. С учетом уравнения (1.78) это приводит к условию

$$\lambda_{l1} \frac{\partial x_{l1}}{\partial \delta} \leq 0. \quad (1.79)$$

На интервале $[T+\delta, t_1]$ N -параметрическое семейство принимает вид

$$x_i = x_i(t, \varepsilon_\sigma, \delta), \quad \alpha_j = \alpha_j(t, \varepsilon_\sigma, \delta). \quad (1.80)$$

Повторяя рассуждения разд. 1.4, получаем, что функции

$$y_i = \left(\frac{\partial x_i}{\partial \delta} \right)_{\varepsilon_\sigma=0, \delta=0}, \quad \beta_j = \left(\frac{\partial \alpha_j}{\partial \delta} \right)_{\varepsilon_\sigma=0, \delta=0} \quad (1.81)$$

должны удовлетворять на минимали уравнениям (1.11) и (1.14). Из них вытекает, что на минимали выполняется соотношение

$$-\lambda_i \dot{y}_i = \frac{\partial F}{\partial x_r} y_r + \frac{\partial F}{\partial \alpha_j} \beta_j, \quad (1.82)$$

где F — функция Лагранжа, а в точках непрерывности α_j — соотношение

$$-\lambda_i \dot{y}_i = \dot{\lambda}_r y_r, \quad (1.83)$$

полученное с учетом (1.49) и (1.50).

Таким образом,

$$\frac{d}{dt} (\lambda_i y_i) = 0, \quad (1.84)$$

откуда

$$\lambda_i y_i = \text{const} \quad (1.85)$$

внутри интервала, заключенного между точками разрыва управляющих функций. Однако ранее было показано, что в точке разрыва α_j функции λ_i непрерывны; y_i также непрерывны в этой точке по свойству непрерывности построенного семейства. Поэтому соотношение (1.85) имеет место всюду на отрезке минимали от $t=T$ до $t=t_1$.

Условие (1.79) можно переписать следующим образом:

$$y_{11} \lambda_{11} \leq 0, \quad (1.86)$$

откуда на основании (1.85) следует эквивалентность его неравенству

$$\lambda_i y_i \leq 0 \quad \text{при} \quad t = T + 0. \quad (1.87)$$

Так как x_i непрерывны при $t = T + \delta$ на каждом элементе N -параметрического семейства, уравнение

$$X_i(T + \delta, \varepsilon_0) = x_i(T + \delta, \varepsilon_0, \delta) \quad (1.88)$$

должно быть тождеством относительно δ (замечание: ε_0 считаются здесь не зависящими от δ). Дифференцируя последнее соотношение по δ , получаем

$$\frac{\partial X_i}{\partial t} = \frac{\partial x_i}{\partial t} + \frac{\partial x_i}{\partial \delta} \quad (1.89)$$

при $t = T + \delta$. Полагая все параметры равными нулю, запишем эти уравнения при $t = T + 0$ в виде

$$\dot{X}_i - \dot{x}_i = y_i. \quad (1.90)$$

Таким образом, условие (1.87) эквивалентно требованию

$$\lambda_i \dot{x}_i \geq \lambda_i \dot{X}_i. \quad (1.91)$$

В этом неравенстве значения λ_i , $\dot{x}_i$ вычисляются в точке $t=T$ минимали. Значения $\dot{X}_i$ представляют собой некоторую систему величин $\dot{x}_i$, полученных путем подстановки в уравнения (1.1) при $t=T$ значений x_i , соответствующих минимали, и любой системы величин A_j , т. е. значений α_j , совместимых со связями (1.3). Неравенство (1.91) представляет собой *условие Вейерштрасса* для нашей задачи, и, поскольку $t=T$ — любая точка минимали, за исключением угловой, оно необходимо удовлетворяется во всех таких точках. Из соображений непрерывности следует, что это условие должно выполняться также и в угловых точках.

1.10. Третье необходимое условие минимума J

Это необходимое условие минимума просто выводится из условия Вейерштрасса. В вариационном исчислении оно носит название *условия Клебша*.

Условие Вейерштрасса можно представить в виде

$$\lambda_i [f_i(x_r, \alpha_j, t) - f_i(x_r, A_j, t)] \geq 0. \quad (1.92)$$

Поскольку как α_j , так и A_j удовлетворяют связям (1.3), это неравенство эквивалентно следующему:

$$F(x_r, A_j, t, \lambda_i, \mu_k) - F(x_r, \alpha_j, t, \lambda_i, \mu_k) \geq 0. \quad (1.93)$$

Разлагая левую часть в ряд Тейлора, получаем

$$\frac{\partial F}{\partial \alpha_j} (A_j - \alpha_j) + \frac{\partial^2 F}{\partial \alpha_h \partial \alpha_j} (A_h - \alpha_h) (A_j - \alpha_j) \geq 0, \quad (1.94)$$

где $h=1, 2, \dots, m$, и для вычисления производной $\partial^2 F / \partial \alpha_h \partial \alpha_j$ переменные α_j заменяются значениями $\alpha_j + \theta (A_j - \alpha_j)$, $0 < \theta < 1$. На основании условия (1.49) первый член неравенства (1.94) обращается в нуль, тогда, полагая

$$A_j = \alpha_j + \eta \pi_j, \quad (1.95)$$

можно записать условие (1.94) следующим образом:

$$\frac{\partial^2 F}{\partial \alpha_k \partial \alpha_j} \pi_k \pi_j \geq 0. \quad (1.96)$$

Поскольку A_j удовлетворяют связям (1.3), имеем

$$g_k(x_i, \alpha_j + \eta \pi_j, t) = 0. \quad (1.97)$$

Разлагая левую часть в ряд Тейлора, получаем

$$g_k(x_i, \alpha_j, t) + \frac{\partial g_k}{\partial \alpha_j} \eta \pi_j = 0, \quad (1.98)$$

где в членах $\partial g_k / \partial \alpha_j$ следует заменить α_j значениями $\alpha_j + \theta' \eta \pi_j$. Ввиду того что α_j также удовлетворяют связям (1.3), уравнение (1.98) сводится к виду

$$\frac{\partial g_k}{\partial \alpha_j} \pi_j = 0. \quad (1.99)$$

Положим далее $\eta \rightarrow 0$, так что $A_j \rightarrow \alpha_j$. В пределе частные производные в условиях (1.96), (1.99) стремятся к их значениям при аргументах $x_i, \alpha_j, t, \lambda_i, \mu_k$. Таким образом, третье необходимое условие состоит в том, что неравенство (1.96) должно выполняться для всех π_j , удовлетворяющих уравнению (1.99).

1.11. Вторая вариация. Достаточные условия

Если минимизирующая вектор-функция вложена в однопараметрическое семейство допустимых вектор-функций, удовлетворяющих также краевым условиям, то для каждого элемента семейства можно вычислить значение функционала J в зависимости от параметра семейства ε . Если на минимали $\varepsilon = 0$, то для этого значения ε мы должны иметь

$$\frac{dJ}{d\varepsilon} = 0, \quad \frac{d^2 J}{d^2 \varepsilon} \geq 0. \quad (1.100)$$

Следствия первого из этих условий были изучены выше. Для рассмотрения второго условия необходимо вычислить так называемую *вторую вариацию J*. Как показано в книге Блисса (стр. 268), вторую вариацию можно выразить через вариации минимизирующей системы функций относительно семейства допустимых систем, и тогда из последнего условия (1.100) сле-

дует, что это выражение должно быть положительно для всех допустимых вариаций. Это требование приводит к присоединенной задаче о минимуме (Блисс, стр. 271) и четвертому необходимому условию. Однако его применение к задачам, которые мы будем рассматривать, затруднительно, ввиду чего до настоящего времени (1962 г.) оно не нашло сколько-нибудь широкого распространения. Следствия из этого дополнительного необходимого условия (впервые обнаруженного Якоби) в этой книге не рассматриваются.

Доказано (Блисс, гл. 9), что совокупность достаточных условий минимума J можно выразить при помощи четырех необходимых условий, упоминавшихся в этой главе. Такая система условий гарантирует только лишь, что минимизирующая вектор-функция доставляет функционалу J локальный минимум, т. е. минимум на множестве допустимых функций, лежащих в сравнительно малой окрестности минимали. Остается еще проблема отыскания абсолютной минимали. В настоящее время она может быть решена только на основе отдельного рассмотрения всех возможных локальных минималей и выбора из этого класса объекта, доставляющего абсолютный минимум J .

Если возникает требование, чтобы функционал J принимал максимальное (а не минимальное, как рассматривалось выше) значение, то меняются знаки в неравенствах, соответствующих условиям Вейерштрасса и Клебша, а также в условии (1.100). Первое необходимое условие останется неизменным.

ЛИТЕРАТУРА

1. Копп Р., Принцип максимума Понтрягина, Методы оптимизации, гл. VII, «Наука», М., 1965, стр. 307—337.
- 2*. Пономарев В. М., Теория управления полетом космических летательных аппаратов, «Наука», М., 1965.
3. Cicala P., Miele A., Generalized theory of the optimum thrust programming for the level flight of a rocket-powered aircraft, *J. Amer. Rocket Soc.*, 26, № 6, 443—455 (1956).
4. Miele A., General variational theory of the flight paths of rocket-powered aircraft, missiles and satellite carriers, *Astronaut. Acta*, 4, № 4, 264—288 (1958).

Упражнения

1. Непрерывная кривая связывает две фиксированные точки в декартовой системе осей Oxy ; s — длина дуги кривой от точки A до некоторой точки $P(x, y)$. Получить уравнения

$$x' = \cos \theta, \quad y' = \sin \theta,$$

где штрих означает дифференцирование по s , а θ — угол, образуемый касательной к прямой в точке P с осью Ox . Рассматривая s как независимую переменную, x, y — как фазовые координаты и θ — как управляющую функцию задачи Майера, показать, что длина дуги минимальна, если вдоль кривой

$$\theta = \alpha = \text{const}$$

(т. е. если кривая представляет собой прямую линию). Проверить выполнение угловых условий и условий Вейерштрасса.

2. Однородная нить весом w на единицу длины и длиной l закреплена своими концами в двух фиксированных точках и висит в вертикальной плоскости под действием силы тяжести. Ox, Oy — горизонтальная и вертикальная оси в этой плоскости, s — длина дуги нити, измеряемая от конца A с минимальным значением координаты x до некоторой точки $P(x, y)$. Обозначив через v потенциальную энергию дуги нити AP , получить уравнения

$$v' = wy, \quad y' = \sin \theta, \quad x' = \cos \theta,$$

где штрих и θ имеют тот же смысл, что и в предыдущей задаче. Предполагая, что форма нити такова, что ее потенциальная энергия минимальна, показать, что уравнение нити имеет вид

$$s = a \operatorname{tg} \theta + b,$$

где a, b — константы, определяемые из краевых условий. Показать при помощи угловых условий, что θ должен быть непрерывен и что значения a и b не должны меняться вдоль нити. Проверить, что условие Вейерштрасса выполняется.

3. Задача о брахистохроне. Гладкий шарик скатывается по проволоке, закрепленной в вертикальной плоскости. Пусть Ox, Oy — горизонтальная и направленная вертикально вниз декартовы оси. Проволока проходит через начало O и точку A . Шарик приходит в движение из точки O с нулевой скоростью и скользит по проволоке под действием силы тяжести по направлению к точке A . Получить уравнения движения

$$\dot{x} = v \sin \theta, \quad \dot{y} = v \cos \theta, \quad v^2 = 2gy,$$

где x, y — координаты шарика в момент t после начала движения, v — его скорость, θ — угол наклона скорости к оси Oy и g — ускорение силы тяжести. Показать, что время движения шарика из начала координат O в точку A минимально при условии, что параметрическое уравнение проволоки имеет вид

$$x = a(2\theta - \sin 2\theta) + b, \quad y = a(1 - \cos 2\theta),$$

где a и b — постоянные, определяемые из условия прохождения проволоки через точки O и A (иначе говоря, если проволока натянута по дуге циклоиды). Проверить выполнимость угловых условий и условия Вейерштрасса.

4. Решить следующую задачу Майера: пусть x — независимая переменная, y и z — фазовые координаты, α — управляющая переменная и уравнения связи имеют вид

$$z' = f(x, y, \alpha), \quad y' = \alpha,$$

где штрих означает дифференцирование по x ; y принимает заданные значения y_0, y_1 при x_0, x_1 соответственно; $z=0$ при $x=x_0$; величина z не фиксирована при $x=x_1$, а минимизируется.

Показать, что если $y=y(x)$ — произвольная функция, удовлетворяющая заданным краевым условиям $y(x_0)=y_0$, $y(x_1)=y_1$, то интеграл

$$\int_{x_0}^{x_1} f(x, y, y') dx$$

принимает минимальное значение при условии, что функция $y(x)$ удовлетворяет уравнению

$$\frac{d}{dx} \left(\frac{\partial f}{\partial y'} \right) = \frac{\partial f}{\partial y}.$$

Показать также, что в угловых точках непрерывны следующие функции:

$$\frac{\partial f}{\partial y'}, \quad f - y' \frac{\partial f}{\partial y'}.$$

Получить условие Вейерштрасса

$$f(x, y, y'^*) - f(x, y, y') - (y'^* - y') \frac{\partial f}{\partial y'} \geq 0,$$

где y'^* — произвольно.

2. РАЗЛИЧНЫЕ ЗАДАЧИ ОПТИМИЗАЦИИ ТРАЕКТОРИИ

2.1. Уравнения движения ракеты

Пусть M — масса вещества, заключенного в момент t внутри поверхности, образованной наружной оболочкой корпуса ракеты и воображаемыми плоскостями, проведенными через выходные сечения двигателей. Следовательно, масса продуктов сгорания, не истекших к данному моменту из сопла, включается в M , в то время как частицы внешней по отношению к ракете газовой струи не принадлежат M . Обозначим через Σ совокупность частиц, входящих в M . Пусть $\mathbf{v}$ — скорость центра масс Σ в инерциальной системе отсчета S , $\mathbf{F}$ — векторная сумма всех внешних сил (т. е. сил тяжести и аэродинамического сопротивления), приложенных к Σ . Если на интервале $(t, t + \delta t)$ масса M меняется на $M + \delta M$ ($\delta M < 0$), частицы с общей массой $-\delta M$ переходят во внешнюю струю. Пусть $\mathbf{c}$ — скорость истечения частиц относительно ракеты в точках на срезе сопла (предполагаемая одинаковой для всех частиц). Тогда количество движения перешедших из Σ в струю за интервал δt частиц относительно S равно $-\delta M(\mathbf{c} + \mathbf{v})$, а количество движения системы Σ в момент $t + \delta t$ измеряется величиной

$$(M + \delta M)(\mathbf{v} + \delta \mathbf{v}) - \delta M(\mathbf{c} + \mathbf{v}), \quad (2.1)$$

где $\mathbf{v} + \delta \mathbf{v}$ — скорость центра инерции совокупности частиц, составляющих при $t + \delta t$ ракету массы $M + \delta M$. В момент t количество движения Σ равно $M\mathbf{v}$. Пренебрегая членами второго порядка, находим из уравнения (2.1) приращение количества движения Σ за интервал δt :

$$M\delta \mathbf{v} - \delta M\mathbf{c}. \quad (2.2)$$

По закону динамики оно должно быть равно импульсу приложенных к Σ внешних сил на интервале действия $(t, t + \delta t)$. Отсюда имеем уравнение

$$\mathbf{F} \delta t = M \delta \mathbf{v} - \delta M \mathbf{c}. \quad (2.3)$$

Деля обе его части на δt и переходя к пределу, получаем *уравнение движения ракеты*

$$M \dot{\mathbf{v}} = \mathbf{F} + \mathbf{c} \dot{M}. \quad (2.4)$$

По мере сгорания топлива центр инерции аппарата перемещается относительно корпуса аппарата. Однако скорость этого движения крайне мала по сравнению со скоростью самого аппарата, следовательно, без дальнейших оговорок можно приравнять $\mathbf{v}$ скорости ракеты на траектории.

Если давление p_e в реактивной струе вне сопла равно атмосферному (или нулю, когда ракета движется в пустоте), наружная поверхность Σ будет испытывать действие постоянного нормального давления (в дополнение к силам трения и другим силам, возникающим при движении в атмосфере). По известному принципу гидростатики равнодействующая этой системы сил равна нулю, благодаря чему в $\mathbf{F}$ необходимо учитывать только силы, связанные с движением в атмосфере (т. е. подъемную силу и силу сопротивления). Однако в случае, когда p_e не равно местному атмосферному давлению p_0 , нужно принять во внимание действие дополнительного давления $p_e - p_0$ на срез сопел. Так, если A — суммарная площадь сопел, то в $\mathbf{F}$ войдет результирующая сила $(p_e - p_0)A$, действующая вдоль осей этих сопел в сторону увеличения силы тяги двигателей. Однако мы будем неизменно пренебрегать этой компонентой вектора $\mathbf{F}$, считая, что полная сила тяги равна $\mathbf{c} \dot{M}$.

В случае, когда ракета движется под действием только силы тяги, а остальные силы отсутствуют, имеем

$$\dot{\mathbf{v}} = \frac{\mathbf{c}}{M} \frac{dM}{dt}. \quad (2.5)$$

Если в процессе полета скорость истечения поддерживается постоянной по величине и направлению,

последнее уравнение интегрируется на интервале (t_0, t_1) , что дает

$$v_1 - v_0 = -c \ln \frac{M_0}{M_1}. \quad (2.6)$$

Таким образом, величина приращения скорости, полученного за счет расхода топлива (и уменьшения массы ракеты от M_0 до M_1), равна

$$V = c \ln \frac{M_0}{M_1}. \quad (2.7)$$

V называется *характеристической скоростью* маневра.

Для произвольного маневра ракеты при наличии внешних сил, в процессе которого величина (и необязательно направление) скорости истечения остается постоянной, величина V , определяемая соотношением (2.7), служит удобной мерой расхода топлива и также носит название *характеристической скорости* маневра. Целью многих из рассматриваемых в настоящей книге задач будет отыскание маневра, который удовлетворяет определенным требованиям, связанным с назначением полета ракет, и в то же время минимизирует характеристическую скорость.

2.2. Максимизация дальности полета ракеты-снаряда

В этом разделе мы рассмотрим движение ракеты с заданной программой расхода топлива. В то же время программа ориентации тяги может выбираться произвольно с учетом единственного ограничения: вектор тяги должен лежать в заданной вертикальной плоскости, проходящей через точку запуска O . В момент $t=0$ ракета стартует из O с нулевой начальной скоростью, и ее двигатель работает до момента $t=T$, после чего он выключается и аппарат продолжает движение по баллистической траектории под действием только силы тяжести. Будем предполагать гравитационное поле однородным и аэродинамическое сопротивление пренебрежимо малым. Наша задача состоит в том, чтобы определить программу ориентации тяги, обеспечивающую максимальную дальность ра-

кеты в горизонтальной плоскости, проходящей через точку O .

Пусть Ox , Oy — горизонтальная и вертикальная оси, проведенные через точку O в плоскости движения, а u и v — соответствующие компоненты скорости ракеты в момент времени t . Если x, y — координаты ракеты в то же самое время и θ — угол наклона тяги к оси Ox , то уравнения движения можно записать в следующей форме:

$$\dot{u} = f \cos \theta, \quad (2.8)$$

$$\dot{v} = f \sin \theta - g, \quad (2.9)$$

$$\dot{x} = u, \quad (2.10)$$

$$\dot{y} = v, \quad (2.11)$$

где $f = -(c/M) (dM/dt)$ — ускорение от действия реактивной силы — заданная функция t .

Начальные условия при $t=0$ суть

$$x = y = u = v = 0. \quad (2.12)$$

При $t=T$ никаких конечных условий не задано.

Пусть (x_1, y_1) — координаты и (u_1, v_1) — компоненты скорости ракеты в момент выключения двигателя. Тогда горизонтальная дальность полета ракеты от этой точки до точки падения на плоскость, горизонтально проведенную через точку O , составляет

$$\frac{u_1}{g} (v_1 + \sqrt{v_1^2 + 2gy_1}). \quad (2.13)$$

Полная дальность полета по горизонтали равна

$$L = x_1 + \frac{u_1}{g} (v_1 + \sqrt{v_1^2 + 2gy_1}). \quad (2.14)$$

Необходимо выбрать управляющую функцию $\theta(t)$, или программу ориентации тяги таким образом, чтобы дальность L была максимальной. Когда $\theta(t)$ — известная функция времени, дифференциальные уравнения первого порядка (2.8)–(2.11) совместно с начальными условиями (2.12) определяют функции состояния $u(t)$, $v(t)$, $x(t)$, $y(t)$ и отсюда — значение L .

Данная задача, очевидно, принадлежит к рассмотренному в первой главе типу, и полученные там результаты применимы в этом случае.

Функция Лагранжа для нашей задачи запишется следующим образом:

$$F = -\lambda_u f \cos \theta - \lambda_v (f \sin \theta - g) - \lambda_x u - \lambda_y v, \quad (2.15)$$

и уравнения (1.50) принимают вид

$$\dot{\lambda}_u = -\lambda_x, \quad \dot{\lambda}_v = -\lambda_y, \quad \dot{\lambda}_x = \dot{\lambda}_y = 0. \quad (2.16)$$

Из условия (1.49) находим

$$\lambda_u f \sin \theta - \lambda_v f \cos \theta = 0. \quad (2.17)$$

Значения $t_0=0$, $t_1=T$ фиксированы, вследствие чего условия (1.47) неприменимы. Условия (1.46) означают, что нормальное решение при $t=T$ должно удовлетворять следующим зависимостям:

$$\lambda_u = -\frac{1}{g}(v_1 + r), \quad (2.18)$$

$$\lambda_v = -\frac{u_1}{gr}(v_1 + r), \quad (2.19)$$

$$\lambda_x = -1, \quad (2.20)$$

$$\lambda_y = -\frac{u_1}{r}, \quad (2.21)$$

где

$$r = \sqrt{v_1^2 + 2gy_1}. \quad (2.22)$$

Интегрируя уравнения (2.16), получаем

$$\lambda_u = at + b, \quad \lambda_v = a't + b', \quad \lambda_x = -a, \quad \lambda_y = -a', \quad (2.23)$$

где a , b , a' , b' — константы интегрирования. Из (2.17) следует

$$\operatorname{tg} \theta = \frac{a't + b'}{at + b}. \quad (2.24)$$

Значения a , b , a' , b' определяются из краевых условий (2.18) — (2.21):

$$\left. \begin{aligned} a &= 1, & b &= -T - \frac{1}{g}(v_1 + r), \\ a' &= \frac{u_1}{r}, & b' &= -\frac{u_1}{r} \left[T + \frac{1}{g}(v_1 + r) \right]. \end{aligned} \right\} \quad (2.25)$$

Соотношение (2.24) приводится к простому виду

$$\operatorname{tg} \theta = \frac{u_1}{r}, \quad (2.26)$$

означающему, что максимальная дальность достигается при постоянном угле наклона вектора тяги к горизонту.

Уравнение (2.26) определяет угол θ с точностью до величины, кратной π . Условие Вейерштрасса¹⁾ (1.91) устраняет оставшуюся неопределенность. Это условие требует выполнения неравенства

$$\lambda_u \dot{u} + \lambda_v \dot{v} + \lambda_x \dot{x} + \lambda_y \dot{y} \leq \lambda_u \dot{U} + \lambda_v \dot{V} + \lambda_x \dot{X} + \lambda_y \dot{Y}, \quad (2.27)$$

где $\dot{U}$, $\dot{V}$, $\dot{X}$, $\dot{Y}$ суть значения $\dot{u}$, $\dot{v}$, $\dot{x}$, $\dot{y}$ соответственно, полученные из уравнений связи (2.8)–(2.11) заменой оптимального значения управляющей функции θ некоторым допустимым значениям θ^* . Очевидно, $\dot{X} = \dot{x}$, $\dot{Y} = \dot{y}$, благодаря чему (2.27) эквивалентно условию

$$\lambda_u \dot{u} + \lambda_v \dot{v} \leq \lambda_u \dot{U} + \lambda_v \dot{V}. \quad (2.28)$$

Подставляя (2.8), (2.9), (2.18), (2.19), это неравенство сводим к виду

$$\cos \theta + \frac{u_1}{r} \sin \theta \geq \cos \theta^* + \frac{u_1}{r} \sin \theta^*, \quad (2.29)$$

откуда следует, что оно удовлетворяется для всех θ^* , если θ принимает такое значение, при котором левая часть достигает своего максимума. Предполагая $u_1 > 0$ (иначе величина L будет отрицательной), приходим к решению уравнения (2.26), в котором θ — острый положительный угол. При этом форма программы реактивного ускорения $f(t)$, очевидно, несущественна и полученное условие справедливо для любых программ изменения величины тяги.

Остается рассмотреть возможность существования угловых точек, в которых управляющая функция θ

¹⁾ Необходимо изменить знак неравенства, так как требуется максимизировать L .

разрывна. Однако θ не может иметь разрывов, так как θ является единственным решением уравнения (2.26) в первом квадранте. Отсюда заключаем, что на оптимальной траектории угловые точки отсутствуют.

Чтобы завершить решение нашей задачи, нужно проинтегрировать уравнения движения (2.8)—(2.11) для случая, когда θ принимает постоянное значение, определяемое соотношением (2.26). Пропедев это, найдем $u(T)$, $v(T)$, $x(T)$, $y(T)$ и, приравняв их соответственно u_1 , v_1 , x_1 , y_1 , получим четыре уравнения для этих еще неизвестных величин. Однако интегрирование уравнений движения нельзя выполнить, пока не известен вид программы реактивного ускорения $f(t)$. Рассмотрим ниже простейший случай:

$$f = \text{const.} \quad (2.30)$$

Более реальный случай постоянной скорости расхода топлива (т. е. $\dot{M} = \text{const}$) проанализирован Лоуденом [1].

Если как f , так и θ являются постоянными, интегрирование уравнений (2.8)—(2.11) элементарно. Используя начальные условия (2.12), запишем

$$\left. \begin{aligned} u_1 &= fT \cos \theta, & v_1 &= (f \sin \theta - g) T, \\ x_1 &= \frac{1}{2} f T^2 \cos \theta, & y_1 &= \frac{1}{2} (f \sin \theta - g) T^2. \end{aligned} \right\} \quad (2.31)$$

Подставляя найденные соотношения в (2.26), получаем для θ уравнение

$$\sin^3 \theta + \frac{f}{g} \cos 2\theta = 0, \quad (2.32)$$

которое при $f > g$ имеет четыре корня в диапазоне $0 < \theta < 2\pi$, по одному в каждом квадранте. На основании вышесказанного очевидно, что приемлемо только решение в первом квадранте. Если $f < g$, решения (2.32) лежат в третьем и четвертом квадрантах и потому недопустимы; в этом случае тяга двигателя недостаточна для преодоления силы тяготения и подъема аппарата.

Когда θ найдено, можно вычислить значения величин u_1, v_1, x_1, y_1 из (2.31) и записать уравнение оптимальной траектории в параметрической форме

$$x = \frac{1}{2} f t^2 \cos \theta, \quad y = \frac{1}{2} (f \sin \theta - g) t^2, \quad (2.33)$$

откуда следует, что оптимальная траектория представляет собой прямую линию, образующую с горизонтом острый угол φ , где

$$\operatorname{tg} \varphi = \operatorname{tg} \theta - \frac{g}{f} \sec \theta. \quad (2.34)$$

По этой линии ракета движется с постоянным ускорением a :

$$a^2 = f^2 + g^2 - 2fg \sin \theta. \quad (2.35)$$

Максимальная дальность найдется, если в соотношение (2.14) подставить (2.31) и (2.32):

$$L_{\max} = f T^2 \left(\frac{f}{g} \operatorname{ctg} \theta - \frac{1}{2} \cos \theta \right). \quad (2.36)$$

Для аномального решения этой задачи условия (1.46) при $\gamma_0=0$ показывают, что все λ_i равны нулю при $t=T$ и, следовательно, тождественно равны нулю в силу (2.16). Уравнение (2.17) в этих условиях не может служить для определения программы ориентации тяги, и любая возможная траектория принадлежит классу аномальных траекторий. Таким образом, этот класс кривых, очевидно, не может содержать оптимальную траекторию.

2.3. Оптимальный запуск искусственного спутника

Программа изменения величины тяги снова предполагается заданной и состоящей из трех различных участков. Считаем, что первый участок длится от начального момента $t=0$ до момента $t=T$ прекращения работы первой ступени ракеты. На втором участке аппарат движется по баллистической траектории под

действием силы тяжести по направлению к высшей точке, касательная в которой горизонтальна. В этот момент включается двигатель второй ступени, разгоняющий полезную нагрузку до орбитальной скорости.

Для упрощения анализа предположим, что движение совершается в вертикальной плоскости, связанной с точкой запуска; вращением и кривизной Земли, сопротивлением атмосферы и неоднородностью гравитационного поля будем пренебрегать. В этой упрощенной постановке можно целиком исключить третий участок маневра, для чего горизонтальная компонента скорости аппарата в конце первого участка должна равняться требуемой орбитальной скорости. В этом случае скорость аппарата в высшей точке траектории будет в точности совпадать с требуемой, так как поле предполагается однородным. Аннулирование третьего участка, очевидно, выгодно, ибо исключает необходимость доставки топлива на высоту орбиты и сокращает, таким образом, общие затраты горючего. В действительности горизонтальная компонента скорости аппарата будет слегка падать на втором, или пассивном, участке, и эти потери должны быть компенсированы в течение короткого заключительного активного участка. Однако нашу идеализацию истинной картины можно рассматривать как пример расчета близкой к оптимальной программы ориентации тяги первой ступени, и уже после ее определения можно рассчитать численным способом истинную траекторию с учетом всех отброшенных ранее факторов.

Если провести Ox , Oy через точку старта, как в предыдущем разделе, то (2.8) — (2.11) по-прежнему будут справедливы для описания первого активного участка. Здесь, однако, вместо y удобнее ввести новую фазовую координату z , определяемую соотношением

$$z = y + \frac{v^2}{2g}. \quad (2.37)$$

При $v > 0$ координата z представляет собой максимальную высоту, на которую может подняться аппарат, если в точке с координатами (v, y) выключить

двигатель. Дифференцируя (2.37), получаем

$$\dot{z} = \dot{y} + \frac{v\dot{v}}{g}. \quad (2.38)$$

Уравнение (2.11) в этом случае эквивалентно следующему соотношению, полученному с учетом (2.9):

$$\dot{z} = v \left(1 + \frac{\dot{v}}{g} \right) = \frac{f}{g} v \sin \theta. \quad (2.39)$$

Зависимости (2.8), (2.9) и (2.39) образуют систему уравнений связи относительно фазовых переменных u , v , z . Вновь θ является единственной управляющей переменной. Соответствующая функция Лагранжа дается выражением

$$F = -\lambda_u f \cos \theta - \lambda_v (f \sin \theta - g) - \lambda_z \frac{f}{g} v \sin \theta. \quad (2.40)$$

При $t=0$ должны выполняться следующие начальные условия:

$$u = v = z = 0. \quad (2.41)$$

При $t=T$ горизонтальная скорость должна равняться круговой скорости $u_{кр}$, а высота, на которую аппарат поднимется по инерции под действием силы тяготения, должна совпадать с высотой орбиты h . Таким образом, в этот момент

$$u = u_{кр}, \quad z = h. \quad (2.42)$$

В задаче требуется минимизировать расход топлива, но так как последний является возрастающей функцией длительности T первого активного участка, это эквивалентно минимизации T . Итак, имеем

$$J = T. \quad (2.43)$$

Подставляя функцию Лагранжа в сопряженную систему (1.50), получаем

$$\dot{\lambda}_u = \dot{\lambda}_z = 0, \quad (2.44)$$

$$\dot{\lambda}_v = -\lambda_z \frac{f}{g} \sin \theta. \quad (2.45)$$

Аналогично из (1.49) следует

$$\lambda_u \sin \theta - \lambda_v \cos \theta - \lambda_z \frac{v}{g} \cos \theta = 0. \quad (2.46)$$

Из уравнений (2.44) заключаем, что

$$\lambda_u = c, \quad \lambda_z = a, \quad (2.47)$$

где a и c — постоянные интегрирования. При помощи (2.9) можно переписать (2.45) следующим образом:

$$\dot{\lambda}_v = -\frac{a}{g} (\dot{v} + g). \quad (2.48)$$

Интегрируя последнее соотношение, получаем

$$\lambda_v = -\frac{a}{g} v - at - b, \quad (2.49)$$

где b — константа интегрирования. Подставляя (2.47), (2.49) в (2.46), получаем зависимость, определяющую оптимальную программу ориентации тяги:

$$\operatorname{tg} \theta = -\frac{at + b}{c}. \quad (2.50)$$

Теперь обратимся к краевым условиям (1.46), (1.47). Из них для нормального решения при $t=T$ следует

$$\lambda_v = 0, \quad (2.51)$$

$$\lambda_u \dot{u} + \lambda_v \dot{v} + \lambda_z \dot{z} = 1. \quad (2.52)$$

Таким образом, на основании (2.49), (2.51) получаем

$$av_1 = -g(aT + b) = gc \operatorname{tg} \theta_1. \quad (2.53)$$

Подставляя далее значения $\dot{u}$, $\dot{v}$, $\dot{z}$ из (2.8), (2.9), (2.39) и зависимости λ_u , λ_v , λ_z из (2.47) и (2.49) в краевое условие (2.52), находим при помощи (2.50)

$$cf_1 \sec \theta_1 + av_1 - gc \operatorname{tg} \theta_1 = 1. \quad (2.54)$$

С учетом (2.53) получается

$$cf_1 = \cos \theta_1. \quad (2.55)$$

Если теперь проинтегрировать уравнения движения (2.8), (2.9) и (2.39) при значении θ , определяемом

(2.50) с учетом начальных условий (2.41), можно найти u_1, v_1, z_1 . Тогда выражения (2.42), (2.50) (при $\theta = \theta_1$ и $t = T$), (2.53) и (2.55) дают пять условий для отыскания неизвестных a, b, c, θ_1, T . Таким образом, задача решена. Частный случай $f(t) = \text{const}$ будет рассмотрен ниже в этом разделе.

Используем теперь условие Вейерштрасса (1.91). Оно требует, чтобы во всех точках траектории имело место неравенство

$$\lambda_u \dot{u} + \lambda_v \dot{v} + \lambda_z \dot{z} \geq \lambda_u \dot{u}^* + \lambda_v \dot{v}^* + \lambda_z \dot{z}^*, \quad (2.56)$$

где величины со звездочками получены из уравнений связи заменой оптимального значения θ каким-нибудь допустимым значением θ^* . Подставляя $\lambda_u, \lambda_v, \lambda_z$ из (2.47), (2.49) и используя уравнения движения, приводим это условие к виду

$$c \cos \theta - (at + b) \sin \theta \geq c \cos \theta^* - (at + b) \sin \theta^*. \quad (2.57)$$

С учетом (2.50) последнее соотношение эквивалентно неравенству

$$c \sec \theta \geq c \cos (\theta^* - \theta) \sec \theta, \quad (2.58)$$

которое справедливо тогда и только тогда, когда

$$c \sec \theta \geq 0. \quad (2.59)$$

При положительном c последнее неравенство означает, что θ должен быть заключен в первом или четвертом, а при отрицательном c — во втором или третьем квадрантах. Тем самым устранена неопределенность, присущая зависимости (2.50). Если предположить, что спутник выводится в сторону положительной полуоси Ox , то можно исключить возможность реализации тупых углов θ и ограничиться рассмотрением положительных значений c .

При $t = T$ ракета находится ниже вершины траектории, и потому $v_1 \geq 0$. Тогда из (2.53) следует, что a/c и θ_1 имеют одинаковый знак. Если θ_1 — отрицательный острый угол, то соотношение (2.50) означает,

что θ возрастает по времени и остается отрицательным острым углом на всем интервале движения. В этом случае v_1 также должна быть отрицательной, и мы приходим к противоречию. Следовательно, θ_1 должен быть острым положительным углом, отношение a/c также должно быть больше нуля (т. е. $a > 0$) и θ — монотонно убывающая функция t .

Итак, θ однозначно определяется всюду с помощью (2.50) и не может быть разрывным. Поэтому на оптимальной траектории нет угловых точек.

Для случая $f = \text{const}$ уравнения движения можно проинтегрировать следующим образом. Продифференцировав (2.50), получим

$$\sec^2 \theta \frac{d\theta}{dt} = -\frac{a}{c}. \quad (2.60)$$

Замена независимой переменной t на θ в уравнениях (2.8), (2.9) и (2.39) дает

$$-\frac{a}{c} \frac{du}{d\theta} = f \sec \theta, \quad (2.61)$$

$$-\frac{a}{c} \frac{dv}{d\theta} = f \operatorname{tg} \theta \sec \theta - g \sec^2 \theta, \quad (2.62)$$

$$-\frac{a}{c} \frac{dz}{d\theta} = \frac{f}{g} v \operatorname{tg} \theta \sec \theta. \quad (2.63)$$

Интегрируя (2.61), (2.62) по θ на интервале (θ_0, θ) с учетом начальных условий (2.41), получаем

$$\frac{a}{gc} u = \frac{f}{g} \ln \frac{\sec \theta_0 + \operatorname{tg} \theta_0}{\sec \theta + \operatorname{tg} \theta}, \quad (2.64)$$

$$\frac{a}{gc} v = \frac{f}{g} \sec \theta_0 - \operatorname{tg} \theta_0 - \frac{f}{g} \sec \theta + \operatorname{tg} \theta. \quad (2.65)$$

Полагая в (2.65) $\theta = \theta_1$, $v = v_1$ и используя (2.53), имеем

$$\frac{f}{g} \sec \theta_0 - \operatorname{tg} \theta_0 = \frac{f}{g} \sec \theta_1, \quad (2.66)$$

откуда

$$\frac{a}{gc} v = \frac{f}{g} (\sec \theta_1 - \sec \theta) + \operatorname{tg} \theta. \quad (2.67)$$

Подставляя в (2.63) v из последнего уравнения и интегрируя, находим

$$\frac{a^2}{gc^2} z = \frac{f^2}{g^2} \sec \theta_1 (\sec \theta_0 - \sec \theta) - \frac{f^2}{2g^2} (\operatorname{tg}^2 \theta_0 - \operatorname{tg}^2 \theta) + \\ + \frac{f}{2g} \left(\operatorname{tg} \theta_0 \sec \theta_0 - \operatorname{tg} \theta \sec \theta + \ln \frac{\sec \theta + \operatorname{tg} \theta}{\sec \theta_0 + \operatorname{tg} \theta_0} \right). \quad (2.68)$$

Исключая c из (2.64), (2.68) с помощью (2.55) и полагая затем $\theta = \theta_1$, приходим к следующим соотношениям:

$$au_{\text{кр}} = \cos \theta_1 \ln \frac{\sec \theta_0 + \operatorname{tg} \theta_0}{\sec \theta_1 + \operatorname{tg} \theta_1}, \quad (2.69)$$

$$a^2 h g \sec^2 \theta_1 = \sec \theta_1 (\sec \theta_0 - \sec \theta_1) - \frac{1}{2} (\operatorname{tg}^2 \theta_0 - \operatorname{tg}^2 \theta_1) + \\ + \frac{g}{2f} \left(\operatorname{tg} \theta_0 \sec \theta_0 - \operatorname{tg} \theta_1 \sec \theta_1 - \ln \frac{\sec \theta_0 + \operatorname{tg} \theta_0}{\sec \theta_1 + \operatorname{tg} \theta_1} \right). \quad (2.70)$$

Два последних уравнения совместно с (2.66) определяют неизвестные θ_0 , θ_1 и a . После этого остальные неизвестные находятся элементарно.

Для решения полученной системы при заданных значениях f/g , h и $u_{\text{кр}}$ целесообразнее поступать следующим образом. Зададим в (2.66) некоторое значение θ_0 и вычислим θ_1 . Из (2.69) найдем a , тогда из (2.70) можно определить h . После этого будем менять θ_0 до тех пор, пока соответствующее значение h не окажется равным заданному. Как и следовало ожидать, по мере уменьшения θ_0 значение h убывает. Минимальная величина θ_0 определяется из условия, что соответствующее ей значение $\theta_1 = 0$; из соотношения (2.66) следует, что в этом случае θ_0 дается выражением

$$\theta_0 = 2 \operatorname{arctg} \frac{g}{f}; \quad (2.71)$$

тогда h достигает своего минимума, а, согласно (2.53), $v_1 = 0$, т. е. аппарат достигает вершины траектории в момент $t = T$. Следовательно, второй участок полета вырождается.

Если требуемое значение h меньше отмеченной критической величины, необходимо видоизменить наше исходное предположение относительно маневра и

допустить, что при $t=T$ аппарат достигает вершины траектории с требуемой орбитальной скоростью. Тогда вместо краевых условий (2.42) получим систему

$$u = u_{кр}, \quad v = 0, \quad y = h. \quad (2.72)$$

Соответствующие этому случаю результаты приведены в упражнении 4 в конце этой главы.

Несмотря на то что ряд принятых в настоящем разделе допущений неприемлем в более интересном для практики случае постоянства силы тяги (а не f), критическое значение будет существовать и выбор краевых условий для решения задачи также будет определяться в зависимости от того, превышает h критическое значение или нет.

2.4. Оптимальная программа регулирования тяги метеорологической ракеты

В предыдущих разделах настоящей главы изучались задачи, в которых программа регулирования величины тяги предполагалась известной и требовалось определить оптимальную программу ориентации тяги. В этом разделе мы рассмотрим задачу, в которой направление тяги известно, а оптимизируется программа для величины тяги. Таковой является задача о максимальной высоте вертикального подъема метеорологической ракеты. Примем, что тяга направлена вертикально вверх в течение всего времени работы двигателя и движение происходит по вертикальной прямой.

Пусть y и v — текущие высота ракеты над точкой старта и ее скорость, m — секундный расход топлива и D — сила аэродинамического сопротивления. Уравнение движения ракеты можно записать в виде

$$\dot{v} = \frac{1}{M}(cm - D) - g. \quad (2.73)$$

Примем, что D зависит от высоты и скорости аппарата, а ускорение силы тяжести g является функцией только y , т. е.

$$D = D(y, v), \quad g = g(y). \quad (2.74)$$

Для замыкания системы дифференциальных связей присовокупим сюда уравнения

$$\dot{y} = v, \quad (2.75)$$

$$\dot{M} = -m. \quad (2.76)$$

Как только управляющая функция $m(t)$ задана, уравнения (2.73), (2.75), (2.76) совместно с начальными условиями

$$v=0, \quad y=0, \quad M=M_0, \quad t=0 \quad (2.77)$$

фиксируют функции $v(t)$, $y(t)$, $M(t)$ и, таким образом, полностью определяют движение ракеты.

Если $\bar{m}$ — максимальное значение секундного расхода топлива, управляющая функция m удовлетворяет неравенству

$$0 \leq m \leq \bar{m}. \quad (2.78)$$

Поскольку изложенная выше общая теория не позволяет учитывать связи в форме неравенств, преобразуем ограничение (2.78) к виду (1.3) путем введения дополнительной управляющей переменной α , не имеющей физического смысла. Для этого потребуем, чтобы функция m удовлетворяла уравнению

$$m(\bar{m} - m) - \alpha^2 = 0. \quad (2.79)$$

Так как $\alpha^2 \geq 0$, уравнение (2.79) эквивалентно неравенству (2.78). Этот прием принадлежит Валентайну [3].

Пусть M_1 — масса сухой ракеты и T — конечный момент, когда достигается максимальная высота. Таким образом, конечные условия имеют вид

$$t = T, \quad M = M_1. \quad (2.80)$$

При $t = T$, очевидно, $v = 0$, однако удобнее вычислять эту величину, нежели использовать ее в качестве конечного условия. Максимизируемый функционал представим в форме

$$J = y_1. \quad (2.81)$$

Приступая к решению задачи, составим функцию Лагранжа

$$F = -\lambda_v \frac{1}{M} (cm - D - Mg) - \lambda_y v + \lambda_M m + \\ + \mu [m(\bar{m} - m) - \alpha^2] \quad (2.82)$$

и запишем условия (1.49), (1.50) в виде

$$\dot{\lambda}_v = \frac{1}{M} \frac{\partial D}{\partial v} \lambda_v - \lambda_y, \quad (2.83)$$

$$\dot{\lambda}_y = \left(\frac{1}{M} \frac{\partial D}{\partial y} + \frac{dg}{dy} \right) \lambda_v, \quad (2.84)$$

$$\dot{\lambda}_M = \frac{1}{M^2} (cm - D) \lambda_v, \quad (2.85)$$

$$0 = -\frac{c}{M} \lambda_v + \lambda_M + \mu(\bar{m} - 2m), \quad (2.86)$$

$$0 = -2\alpha\mu. \quad (2.87)$$

Краевые условия при $t=T$ определяются следующим образом:

$$\lambda_v = 0, \quad \lambda_y = -1, \quad \lambda_v \dot{v} + \lambda_y \dot{y} + \lambda_M \dot{M} = 0. \quad (2.88)$$

Поскольку t не входит явно в F , можно записать первый интеграл в форме (1.67), откуда следует, что третье из условий (2.88) выполняется на всей траектории. Подставляя в него $\dot{v}$, $\dot{y}$, $\dot{M}$ из уравнений связи, получаем

$$\lambda_v \frac{1}{M} (cm - D - Mg) + \lambda_y v - \lambda_M m = 0. \quad (2.89)$$

Согласно (2.87), нужно рассмотреть два случая:

1) $\mu=0$, 2) $\alpha=0$.

Если $\mu=0$, из (2.86) вытекает

$$\lambda_M = \frac{c}{M} \lambda_v. \quad (2.90)$$

Подставляя полученное для λ_M выражение в (2.85), находим

$$\dot{\lambda}_v = -\frac{D}{cM} \lambda_v. \quad (2.91)$$

Далее из (2.83) следует

$$\lambda_y = \frac{1}{M} \left(\frac{\partial D}{\partial v} + \frac{D}{c} \right) \lambda_v. \quad (2.92)$$

Подстановка значений λ_M , λ_y из (2.90), (2.92) соответственно в первый интеграл (2.89) приводит к уравнению

$$\left[-\frac{D}{M} - g + \frac{v}{M} \left(\frac{\partial D}{\partial v} + \frac{D}{c} \right) \right] \lambda_v = 0. \quad (2.93)$$

Таким образом, либо

$$\lambda_v = 0, \quad (2.94)$$

либо

$$Mg + D - \left(\frac{\partial D}{\partial v} + \frac{D}{c} \right) v = 0, \quad (2.95)$$

Возможность обращения λ_v в нуль можно сразу исключить, поскольку, согласно (2.92), это повлекло бы за собой обращение в нуль λ_y . В свою очередь, поскольку λ_v и λ_y непрерывны в угловых точках и уравнения (2.83), (2.84) выполняются всюду на траектории, это означало бы, что λ_v и λ_y обращаются в нуль тождественно, что противоречит конечным условиям (2.88). Таким образом, следует принять зависимость (2.95), которая вместе с уравнением (2.73), записанным в форме

$$Mvv' + cvM' + D + Mg = 0 \quad (2.96)$$

(штрих означает дифференцирование по y), определяет M и v в зависимости от y . В решении фигурирует лишь одна константа интегрирования, поэтому нельзя удовлетворять обоим начальным условиям $v=0$, $M=M_0$ (при $y=0$). В самом деле, после подстановки $v=0$ в (2.95) очевидно, что v не может обращаться в нуль на дуге рассматриваемого типа. Поэтому для полноты следует включить в оптимальную траекторию дуги других типов. Такие дуги получаются, когда уравнение (2.87) выполняется при $\alpha=0$. В этом случае из (2.79) следует, что соответствующая программа расхода топлива такова: либо $m=0$, либо

$m = \bar{m}$, т. е. либо двигатель выключен и аппарат движется по инерции, либо он полностью включен и тяга максимальна.

Таким образом, показано, что оптимальная траектория может включать в себя участки трех типов: 1) с промежуточной тягой, 2) с максимальной тягой и 3) с нулевой тягой. Эти участки сопрягаются друг с другом в угловых точках. Исследуем последовательность, в которой из этих участков формируется оптимальная траектория.

Условие Вейерштрасса (1.91) (с обратным знаком неравенства) требует во всех точках выполнения неравенства

$$\lambda_v \frac{1}{M} (cm - D - Mg) + \lambda_y v - \lambda_m m \leq \leq \lambda_v \frac{1}{M} (cm^* - D - Mg) + \lambda_y v - \lambda_m m^*, \quad (2.97)$$

где m^* — произвольная величина, удовлетворяющая ограничению (2.78). Это условие сразу приводится к виду

$$\kappa m \geq \kappa m^*, \quad (2.98)$$

где

$$\kappa = \lambda_m - \frac{c}{M} \lambda_v. \quad (2.99)$$

На пассивном участке $m = 0$, и условие выполняется в случае

$$\kappa \leq 0. \quad (2.100)$$

На участке с максимальной тягой $m = \bar{m}$, и условие удовлетворяется, если

$$\kappa \geq 0. \quad (2.101)$$

На участке с промежуточной тягой m^* может принимать значения, как большие, так и меньшие m , и условие может иметь место только при

$$\kappa = 0. \quad (2.102)$$

Условие (2.88) показывает, что

$$\dot{y} = -\lambda_m m \quad (2.103)$$

в конечный момент $t = T$.

Если допустить, что заключительный этап движения является участком промежуточной тяги ($\kappa=0$), то в силу первого из граничных условий (2.88) λ_M необходимо обращается в нуль при $t=T$ и условие (2.103) указывает, что $\dot{y}$ также равно нулю. Однако выше мы убедились, что на дуге рассматриваемого типа это невозможно. Далее, если бы на заключительном отрезке тяга была максимальна, то $\kappa \geq 0$ и при $t=T$

$$\lambda_M \geq \frac{c}{M} \lambda_v = 0. \quad (2.104)$$

Тогда, согласно (2.103), $\dot{y} \leq 0$ в этот момент. Однако даже в крайнем случае, если $\dot{y}(T)=0$, при условии, что тяга двигателя по предположению превышает вес ракеты при $t=T$, это означало бы, что $\dot{y}$ меньше нуля на интервале $t < T$. Мы исключим такую возможность (хотя она могла бы возникнуть в случае, когда в начальный момент величина тяги двигателя недостаточна для отрыва аппарата от стартовой площадки). Таким образом, заключительный участок должен быть только пассивным. Отсюда следует, что в конечный момент $t=0$, и, согласно (2.103), $\dot{y}$ обращается в нуль при $t=T$, как и следовало ожидать.

Так как мы предположили, что на всем интервале движения скорость ракеты направлена вертикально вверх, начальный интервал не может быть участком нулевой тяги. Точно так же он не может быть участком промежуточной тяги, поскольку на последнем v не обращается в нуль. Следовательно, он может быть только участком максимальной тяги.

В угловых точках, разделяющих два разнородных участка, величины λ_i и входящие в левую часть первого интеграла (2.89) слагаемые должны быть непрерывны, последнее требование означает непрерывность выражения

$$\left(\frac{c}{M} \lambda_v - \lambda_M \right) m, \quad (2.105)$$

что в свою очередь имеет место лишь в такой угловой точке, где m разрывно, если только в этой точке

$$\kappa = 0. \quad (2.106)$$

Из соотношения (2.99) получаем

$$\lambda_M = \frac{c}{M} \lambda_v + \kappa. \quad (2.107)$$

Подставляя это значение λ_M в (2.85), находим

$$\dot{\lambda}_v = -\frac{M}{c} \dot{\kappa} - \frac{D}{cM} \lambda_v, \quad (2.108)$$

после чего из (2.83) следует

$$\lambda_y = \frac{1}{M} \left(\frac{\partial D}{\partial v} + \frac{D}{c} \right) \lambda_v + \frac{M}{c} \dot{\kappa}. \quad (2.109)$$

Подстановка значений λ_M , λ_y из (2.107), (2.109) в первый интеграл (2.89) приводит к уравнению

$$\dot{\kappa} - \frac{cm}{vM} \kappa = \frac{c}{vM^2} \lambda_v G, \quad (2.110)$$

где G — левая часть уравнения (2.95). Последнюю зависимость перепишем в виде

$$\dot{K} = \frac{c}{vM^2} \lambda_v G \exp \left(- \int \frac{cm}{vM} dt \right), \quad (2.111)$$

где

$$K = \kappa \exp \left(- \int \frac{cm}{vM} dt \right). \quad (2.112)$$

Рассмотрим (2.83), (2.84). Они эквивалентны соотношениям

$$\dot{\omega} = -\lambda_y \exp \left(- \int \frac{1}{M} \frac{\partial D}{\partial v} dt \right), \quad (2.113)$$

$$\dot{\lambda}_y = -H\omega, \quad (2.114)$$

где

$$\omega = \lambda_v \exp \left(- \int \frac{1}{M} \frac{\partial D}{\partial v} dt \right), \quad (2.115)$$

$$H = - \left(\frac{1}{M} \frac{\partial D}{\partial y} + \frac{dg}{dy} \right) \exp \left(\int \frac{1}{M} \frac{\partial D}{\partial v} dt \right). \quad (2.116)$$

Так как D и g — монотонно убывающие функции от y для всех значений v , H всегда положительно. Конечные условия (2.88) показывают, что $\omega = 0$, $\lambda_y = -1$ при $t = T$. Из (2.113), (2.114) далее следует, что ω и λ_y — строго возрастающие функции на интервале $(0, T)$, и

потому они отрицательны на нем всюду (ω и λ_y непрерывны в силу условий, установленных для угловых точек). Тогда из (2.115) следует, что $\lambda_v < 0$ на всей траектории. С помощью (2.111) мы можем сделать вывод, что $\dot{K}$ и G всегда имеют противоположные знаки или обращаются в нуль одновременно.

На дуге с промежуточной тягой G равно нулю тождественно. Допустим, что условия нашей задачи таковы, что G монотонно убывает на участке максимальной тяги и строго возрастает на пассивном участке. Тогда можно доказать, что оптимальная траектория представляет собой одну из двух последовательностей:

1) участок максимальной тяги (участок МТ) — участок промежуточной тяги (участок ПТ) — участок нулевой тяги (участок НТ);

2) участок МТ — участок НТ.

Справедливость каждого положения легко обосновать, если ввести следующую зависимость силы сопротивления от скорости и высоты:

$$D = Ae^{-\beta y} v^\gamma. \quad (2.117)$$

При надлежащем выборе параметров A , β , γ это соотношение может обеспечить достаточно хорошую аппроксимацию истинной зависимости. Подставляя указанное значение D в левую часть уравнения (2.95), получаем

$$G = Mg - \left(\frac{v}{c} + \gamma - 1 \right) D. \quad (2.118)$$

На участке НТ вес Mg остается постоянным с точностью до пренебрежимо малого изменения, связанного с вариацией g по высоте. Однако, как и следовало ожидать, сила сопротивления D падает по мере уменьшения скорости. В результате G возрастает. На участке МТ Mg убывает и v увеличивается. При больших значениях v существует, однако, возможность, когда при этом D может уменьшаться вследствие влияния коэффициента плотности атмосферы $\exp(-\beta y)$. Тем не менее в большинстве случаев D будет возрастать, а G — уменьшаться.

В силу непрерывности λ_v , λ_M , M всюду на оптимальной траектории из (2.99) следует непрерывность κ . Дифференцируя κ с учетом (2.83), (2.85), находим соотношение

$$\dot{\kappa} = -\frac{1}{M^2} \left(D + c \frac{\partial D}{\partial v} \right) \lambda_v + \frac{c}{M} \lambda_y, \quad (2.119)$$

из которого следует непрерывность производной $\dot{\kappa}$. Из соотношения (2.112) следует, что K непрерывна, но, поскольку координата m разрывна, производная $\dot{K}$ не

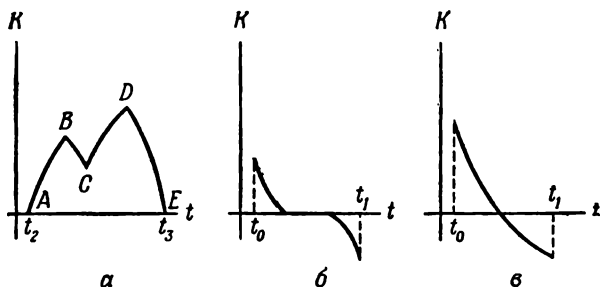


Рис. 2.1.

является непрерывной. Пусть задан график функции $K(t)$ с числом нулей более одного, и пусть $t=t_2$, $t=t_3$ — два последовательных нуля K , между которыми K принимает положительное значение (рис. 2.1, а). Тогда $\kappa > 0$, и интервал (t_2, t_3) соответствует периоду максимальной тяги. На интервале (t_2, t_3) K не может монотонно возрастать. Допустим, что K возрастает на дуге AB и убывает на дуге BC , т. е. $\dot{K} > 0$ на AB , $\dot{K} < 0$ на BC . Тогда $G < 0$ на AB и $G > 0$ на BC . Однако по определению G непрерывна всюду, и потому между A и C она может только возрастать. В силу наших допущений это означает, что интервал (t_2, t_3) соответствует участку нулевой тяги, что противоречит исходному предположению о том, что тяга на всем интервале максимальна. Аналогично, допустив, что $K < 0$ на (t_2, t_3) , также придем к противоречию. Таким образом, заключаем, что если K обладает двумя нулями,

то на всем отрезке между ними K равно нулю тождественно.

Пусть в начальный момент двигатель работает на режиме максимальной тяги, ($K \geq 0$), а в конце выключен ($K \leq 0$). Тогда график $K(t)$ должен принимать одну из форм, показанных на рис. 2.1, б и в, где всюду $\dot{K} \leq 0$. На отрезке, где $\dot{K} = 0$, $K = 0$, $G = 0$, что соответствует участку ПТ. Отсюда следует, что начальный участок МТ и конечный участок НТ могут быть разделены не более чем одним участком ПТ. Таким образом, начальный период максимальной тяги длится либо до момента, когда выгорит весь запас топлива, либо до момента, когда v удовлетворит условию (2.95), в зависимости от того, что наступит скорее. Если раньше израсходуется все топливо, то наступит участок НТ, чему соответствует рис. 2.1, в. Однако если в определенный момент скорость v достигнет такого значения, что условие $G = 0$ выполнится при наличии некоторого количества топлива, то участок МТ нельзя продлить дальше указанной точки, ибо если это было так, то, по предположению, функция G , продолжая убывать, приняла бы отрицательные значения, а K — положительные, в то время как мы показали, что всюду $\dot{K} \leq 0$. Таким образом, если в точке соединения начинается участок ПТ, то он продлится до полного выгорания всего запаса горючего. Этому случаю соответствует рис. 2.1, б.

Следует заметить, что знак величины x или ее обращение в нуль на траектории решают вопрос о реализации одной из трех программ: максимальной тяги, нулевой тяги или промежуточной тяги. Поэтому x называется *функцией переключения величины тяги*. Такие функции переключения появляются при решении многих задач оптимизации траекторий ракет.

Детальное исследование оптимальной траектории конкретного аппарата с реальным законом аэродинамического сопротивления читатель может найти в работе Лейтмана [2].

Если аэродинамическим сопротивлением можно пренебречь (когда, например, ракета запускается на

большой высоте), уравнение (2.95) не имеет решения и оптимальная траектория состоит только из двух участков: 1) начального участка максимальной тяги, на котором расходуется весь имеющийся запас топлива, и 2) заключительного участка свободного движения аппарата к вершине траектории под действием силы тяжести.

ЛИТЕРАТУРА

1. Lawden D. F., Dynamic problems of interplanetary flight, *Aeronaut. Quart.*, 6, № 3, 165—180 (1955).
2. Leitmann G., Optimum thrust programming for high-altitude rockets, *Aeronaut. Engng Rev.*, 16, № 6, 63 (1957).
3. Valentine F. A., The problem of Lagrange with differential inequalities as added side conditions, Dissertation, Department of Mathematics, University of Chicago, 1937.

Упражнения

1. Модифицировать задачу из разд. 2.2, считая, что из некоторой точки наклонной плоскости запускается ракета и дальность ее полета в указанной плоскости максимизируется. (Указание. Возьмите ось x в этой плоскости, ось y перпендикулярно к ней.) Показать, что если плоскость движения пересекает наклонную плоскость по линии, составляющей угол $\alpha > 0$ с горизонтом, и $\theta = \text{const}$ — угол, образуемый тягой с горизонтом, то аналог соотношения (2.32) принимает вид

$$\sin(\theta - \alpha) \sin^2 \theta + \frac{f}{g} \cos(2\theta - \alpha) = 0.$$

2. Для задачи из разд. 2.3 при условии $f = \text{const}$ показать, что горизонтальная дальность ракеты равна

$$x_1 = \frac{\cos^2 \theta_1}{a^2 f} \left(\sec \theta_0 - \sec \theta - \lg \theta \ln \frac{\sec \theta_0 + \lg \theta_0}{\sec \theta + \lg \theta} \right).$$

Вывести отсюда, что горизонтальное удаление точки выхода спутника на орбиту от точки старта равно $g \lg \theta_0 \cos^2 \theta_1 / a^2 f^2$.

3. Показать, что для задачи из разд. 2.3 при условии $f = \text{const}$ критическое значение h равно

$$\frac{u_{\text{кр}}^2}{gE^2} \left(\frac{1}{n^2 - 1} - \frac{E}{2n} \right),$$

где $n = f/g$, $E = \ln[(n+1)/(n-1)]$. Установить, что этой величине h соответствует

$$T = \frac{2u_{\text{кр}}}{gE} \frac{1}{n^2 - 1}.$$

В случае, когда n велико и орбита спутника есть круг радиуса R , убедиться, что критическая высота приблизительно равна $R/6\pi^2$.

4. Провести оптимизацию траектории для задачи из разд. 2.3 с конечными условиями (2.72), предполагая, что h меньше критической высоты. Показать, что программа ориентации тяги дается выражением

$$\operatorname{tg} \theta = -(at + b).$$

Для частного случая $f = \text{const}$ показать, что θ_0 , θ_1 и a удовлетворяют уравнениям

$$\begin{aligned} \operatorname{tg} \frac{\theta_1}{2} &= \frac{1 - n \operatorname{tg} (\theta_0/2)}{n - \operatorname{tg} (\theta_0/2)}, \\ au_{\text{кр}} &= ng \ln \frac{\operatorname{tg} (\theta_0/2 + \pi/4)}{\operatorname{tg} (\theta_1/2 + \pi/4)}, \\ 2a^2h + au_{\text{кр}} &= ng (\sin \theta_0 - \sin \theta_1) \sec \theta_0 \sec \theta_1. \end{aligned}$$

5. Приняв $f = 5g$, $u_{\text{кр}} = 8,05$ км/сек, $g = 9,81$ м/сек², вычислить значения h и T , соответствующие величинам θ_0 , лежащим во включающем критическую высоту диапазоне [использовать уравнения (2.50), (2.55), (2.66), (2.69), (2.70) и результаты упражнения 4]. Нанести на чертеже зависимость $T(h)$ и убедиться, что T — убывающая функция h .

6. Ракета-зонд импульсно разгоняется ускорителем, который быстро доводит скорость аппарата до значения, при котором удовлетворяется уравнение (2.95). Показать, что если M_0 — масса ракеты в момент отделения ускорителя и закон аэродинамического сопротивления имеет вид

$$D = Ae^{-\beta v} v^2,$$

то скорость ракеты в конце участка разгона равна cV_0 , где

$$V_0^2 + V_0^3 = \frac{M_0 g}{Ac^2}.$$

Для случая, когда тяга программируется далее таким образом, что скорость ракеты продолжает удовлетворять уравнению (2.95), в предположении $g = \text{const}$ вывести следующие соотношения, связывающие высоту y и время полета t со скоростью $v = cV$:

$$\begin{aligned} \beta y &= V - V_0 + \frac{1}{2} (\gamma + \rho + 3) \ln \frac{2V - \gamma - \rho + 1}{2V_0 - \gamma - \rho + 1} + \\ &\quad + \frac{1}{2} (\gamma - \rho + 3) \ln \frac{2V - \gamma + \rho + 1}{2V_0 - \gamma + \rho + 1}, \\ \frac{gt}{c} &= \ln \frac{V_0}{V} + \frac{1}{2} (\gamma + \rho + 1) \ln \frac{2V - \gamma - \rho + 1}{2V_0 - \gamma - \rho + 1} + \\ &\quad + \frac{1}{2} (\gamma - \rho + 1) \ln \frac{2V - \gamma + \rho + 1}{2V_0 - \gamma + \rho + 1}, \end{aligned}$$

где

$$\gamma = \frac{g}{\beta c^2}, \quad \rho^2 = \gamma^2 + 6\gamma + 1.$$

3. ОБЩАЯ ТЕОРИЯ ОПТИМАЛЬНЫХ ТРАЕКТОРИЙ РАКЕТ

3.1. Дуги экстремали

В настоящей главе исследуется задача определения оптимальной траектории ракеты, движущейся в совершенно произвольном гравитационном поле (в том числе и нестационарном). При этом ни программа ориентации, ни программа регулирования величины тяги не заданы заранее. Будем полагать, что движение происходит в пустоте и не является обязательно плоским. Многие из приведенных ниже результатов были впервые получены Лоуденом [1, 2, 4, 5] и Лейтманом [6].

Пусть Ox_1, Ox_2, Ox_3 — тройка прямоугольных декартовых осей координат, образующих инерциальную систему отсчета, и x_i ($i = 1, 2, 3$) — координаты ракеты в указанной системе в момент t . Если v_i — компоненты скорости ракеты в тот же момент, то уравнения движения можно записать в виде

$$\dot{v}_i = \frac{cm}{M} l_i + g_i, \quad (3.1)$$

$$\dot{x}_i = v_i, \quad (3.2)$$

$$\dot{M} = -m, \quad (3.3)$$

где l_i — направляющие косинусы вектора тяги двигателя, g_i — компоненты гравитационного ускорения, m — секундный массовый расход топлива. Величины g_i зависят от координат ракеты, а для нестационарного поля — и от момента t , в который аппарат занимает данное положение:

$$g_i = g_i(x_1, x_2, x_3, t). \quad (3.4)$$

Направляющие косинусы удовлетворяют условию

$$l_1^2 + l_2^2 + l_3^2 = 1. \quad (3.5)$$

Как и в разд. 2.4, будем предполагать, что секундный расход топлива ограничен, в силу чего m подчиняется уравнению связи

$$m(\bar{m} - m) - \alpha^2 = 0. \quad (3.6)$$

Управляющие переменные суть l_i , m , α , и как только задана их зависимость от t , значения v_i , x_i , M определяются дифференциальными уравнениями (3.1) — (3.3) и начальными условиями при $t = t_0$:

$$v_i = v_{i0}, \quad x_i = x_{i0}, \quad M = M_0. \quad (3.7)$$

Допустим, что требуется минимизировать некоторую функцию J конечных значений величин v_i , x_i , M при $t = t_1$. Детальное определение этой функции дадим на более позднем этапе. Построим функцию Лагранжа

$$F = -\lambda_i \left(\frac{cm}{M} l_i + g_i \right) - \lambda_{i+3} v_i + \lambda_7 m + \\ + \mu_1 (l_1^2 + l_2^2 + l_3^2 - 1) + \mu_2 [m(\bar{m} - m) - \alpha^2]. \quad (3.8)$$

Здесь имеется в виду суммирование по индексу $i = 1, 2, 3$. Тогда необходимые условия (1.49), (1.50) приводят к уравнениям

$$\dot{\lambda}_i = -\lambda_{i+3}, \quad (3.9)$$

$$\dot{\lambda}_{i+3} = -\lambda_j \frac{\partial g_j}{\partial x_i}, \quad (3.10)$$

$$\dot{\lambda}_7 = \frac{cm}{M^2} \lambda_i l_i, \quad (3.11)$$

$$0 = -\frac{cm}{M} \lambda_i + 2\mu_1 l_i, \quad (3.12)$$

$$0 = -\frac{c}{M} \lambda_i l_i + \lambda_7 + \mu_2 (\bar{m} - 2m), \quad (3.13)$$

$$0 = -2\mu_2 \alpha. \quad (3.14)$$

Уравнение (3.14) означает, что μ_2 и α должны обращаться в нуль либо порознь, либо одновременно. Если $\alpha = 0$, m равно нулю или $\bar{m}$. При $\mu_2 = 0$ допустимы промежуточные значения m . Таким образом, оптимальная траектория может содержать дуги следующих трех типов: 1) участки нулевой тяги (участки

НТ), 2) участки максимальной тяги (участки МТ) и 3) участки промежуточной тяги (участки ПТ).

Исключение λ_{i+3} из (3.9), (3.10) приводит к уравнениям

$$\ddot{\lambda}_i = \lambda_j \frac{\partial g_j}{\partial x_i}. \quad (3.15)$$

Поскольку g_j суть компоненты вектора, $\partial g_j / \partial x_i$ подобен тензору второго ранга относительно преобразований используемых нами прямоугольных декартовых координат; поэтому величины λ_i , удовлетворяющие уравнению (3.15), ведут себя аналогично компонентам вектора при таких преобразованиях. Вектор с компонентами λ_i обозначим через $\mathbf{p}$ и дадим ему название *базис-вектора* или *базиса*.

Если m , μ_1 не обращаются в нуль одновременно, то, согласно (3.12), l_i находятся между собой в том же отношении, что и λ_i , в силу чего вектор тяги всегда коллинеарен базис-вектору. Если $m = 0$, т. е. двигатель выключен, числовые значения l_i не влияют на движение. Если $\mu_1 = 0$, базис-вектор обращается в нуль.

Условие Вейерштрасса (1.91) требует, чтобы в каждой точке оптимальной траектории неравенство

$$\left(\frac{c}{M} \lambda_i l_i - \lambda_7 \right) m \geq \left(\frac{c}{M} \lambda_i l_i^* - \lambda_7 \right) m^* \quad (3.16)$$

было справедливо для всех возможных значений l_i^* , m^* , удовлетворяющих связям (3.5), (3.6).

На участке НТ $m = 0$, и последнее условие означает

$$\lambda_7 \geq \frac{c}{M} \lambda_i l_i^*. \quad (3.17)$$

Величина $\lambda_i l_i^*$ представляет собой скалярное произведение базис-вектора и единичного вектора с компонентами l_i^* . При переменных l_i^* максимум этой величины достигается при условии коллинеарности вектора l_i^* и базис-вектора и равен значению модуля базис-вектора p . Следовательно, необходимо, чтобы

$$\lambda_7 \geq \frac{c}{M} p, \quad (3.18)$$

где

$$\rho = (\lambda_1^2 + \lambda_2^2 + \lambda_3^2)^{1/2}. \quad (3.19)$$

На дуге МТ $m = \bar{m}$, поэтому, согласно условию (3.16) при $m^* = \bar{m}$, очевидно,

$$\lambda_i l_i \geq \lambda_i l_i^*. \quad (3.20)$$

Аналогично, полагая $l_i^* = l_i$ в неравенстве (3.16), убеждаемся, что при условии $m^* \leq \bar{m}$ указанное соотношение эквивалентно требованию

$$\lambda_i \leq \frac{c}{M} \lambda_i l_i. \quad (3.21)$$

Обратно, условия (3.20), (3.21), очевидно, достаточны для выполнения соотношения (3.16). Условие (3.20) будет выполняться для всех l^* тогда и только тогда, когда $\lambda_i l_i$ принимает свое максимальное значение относительно вариаций l_i . Но $\lambda_i l_i$ есть скалярное произведение векторов λ_i , l_i , и, следовательно, последние должны быть коллинеарны. В соответствии с полученным ранее результатом имеем, что направления базиса и вектора тяги должны быть одинаковы. В результате

$$l_i = \frac{\lambda_i}{(\lambda_1^2 + \lambda_2^2 + \lambda_3^2)^{1/2}}, \quad (3.22)$$

и условие (3.21) сводится к виду

$$\lambda_i \leq \frac{c}{M} \rho. \quad (3.23)$$

В частном случае, когда все λ_i равны нулю, $\rho = 0$ и условие (3.23) немедленно следует из (3.21).

На дуге ПТ m^* может принимать значения, как большие, так и меньшие m . Принимая $l_i^* = l_i$ в условии (3.16), убеждаемся, что неравенство в нем не может быть справедливым при всех допустимых m^* , однако равенство возможно при условии

$$\lambda_i = \frac{c}{M} \lambda_i l_i. \quad (3.24)$$

При указанном значении λ_7 соотношение (3.16) тогда означает, что неравенство

$$\lambda_7 \geq \frac{c}{M} \lambda_i l_i^* \quad (3.25)$$

должно иметь место для всех допустимых l_i^* . Правая часть этого неравенства максимальна при условии коллинеарности векторов λ_i , l_i^* , тогда необходимо

$$\lambda_7 \geq \frac{c}{M} p. \quad (3.26)$$

Однако условие (3.24) означает, что

$$\lambda_7 \leq \frac{c}{M} p, \quad (3.27)$$

причем равенство соответствует только случаю коллинеарности векторов λ_i , l_i . Отсюда

$$\lambda_7 = \frac{c}{M} p, \quad (3.28)$$

и тяга должна быть направлена по базису, т. е. l_i определяются соотношениями (3.22). В частном случае при обращении базис-вектора в нуль условие (3.28) также справедливо.

Результаты, полученные из условия Вейерштрасса, можно резюмировать следующим образом: 1) при работе двигателя тягу следует всегда ориентировать по направлению базис-вектора ($p \neq 0$); 2) должны выполняться условия: $\kappa \leq 0$ на участке НТ, $\kappa \geq 0$ на участке МТ и $\kappa = 0$ на участке ПТ, причем функция κ определяется соотношением

$$\kappa = \frac{c}{M} p - \lambda_7. \quad (3.29)$$

В точке сопряжения двух участков различных типов множители λ_i , λ_{i+3} , λ_7 должны быть непрерывны. В соответствии с (3.9), это эквивалентно утверждению, что $\mathbf{p}$, $\dot{\mathbf{p}}$ и λ_7 непрерывны. Следовательно, геометрическое место концов вектора $\mathbf{p}$ в системе прямоугольных осей будет представлять собой гладкую без изломов кривую. Это геометрическое место точек но-

сит название *годографа базис-вектора*¹⁾). Поскольку тяга направлена всегда по вектору p , l_i , очевидно, не могут быть разрывны, за исключением точки, где базис обращается в нуль. В такой точке годограф базиса проходит через начало координат, и его направление меняется на противоположное. Поэтому все l_i здесь меняют знак, т. е. производится реверс тяги.

В угловой точке дополнительно требуется непрерывность выражения (1.64). Подставляя значения производных фазовых переменных из уравнений (3.1) — (3.3) и используя тот факт, что λ_i , λ_{i+z} , g_i , v_i , как известно, непрерывны, получаем, что это требование удовлетворяется при условии непрерывности выражения

$$\frac{cm}{M} \lambda_i l_i - \lambda_7 m = m\kappa. \quad (3.30)$$

Отсюда, если в угловой точке m разрывно, то тогда в ней

$$\kappa = 0. \quad (3.31)$$

Остается учесть уравнения (3.11) и (3.13). Исключим λ_7 из числа переменных, выразив его в функции κ с помощью (3.29). Подставляя полученное таким способом значение λ_7 в (3.11) и (3.13) и используя (3.22), получаем

$$\dot{\kappa} = \frac{c}{M} \dot{p}, \quad (3.32)$$

$$\kappa = \mu_2 (\bar{m} - 2m). \quad (3.33)$$

(Замечание: (3.22) может служить для определения l_i и в случае $m = 0$.)

На участках НТ и МТ соотношение (3.33) используется только для определения μ_2 . На дуге НТ M — постоянная величина, и (3.32) немедленно интегрируется; тогда получаем

$$\kappa = \frac{c}{M} p + \text{const.} \quad (3.34)$$

¹⁾ В отечественной литературе ему соответствует название *р-траектория*. — *Прим. перев.*

На участке ПТ $\mu_2=0$, откуда $\kappa=0$. Соотношение (3.32) поэтому означает, что

$$p = \text{const}, \quad (3.35)$$

т. е. модуль базиса постоянен.

Соберем теперь вместе результаты настоящего раздела.

Компоненты базиса $\mathbf{p}$ удовлетворяют системе (3.15), которая в векторной записи имеет вид

$$\ddot{\mathbf{p}} = \nabla(\mathbf{p} \cdot \mathbf{g}), \quad (3.36)$$

где $\mathbf{g}$ — гравитационное ускорение. На активном участке тяга направлена по вектору $\mathbf{p}$ (при условии, что $\mathbf{p} \neq 0$). На участке НТ κ отрицательна и определяется из (3.34). На участке МТ κ положительна и определяется из (3.32). На участке ПТ κ равна нулю тождественно и модуль базиса постоянен. κ является *функцией переключения величины тяги*. В угловой точке, разделяющей дуги двух разных типов, где t разрывна, κ обращается в нуль. Кроме того, базис и его первая производная непрерывны и, в силу непрерывности λ_7 и p , κ также непрерывна. Аналогично из (3.32) очевидно, что κ непрерывна всюду, за исключением, быть может, точки обращения в нуль $\mathbf{p}$, где направление тяги меняется на противоположное.

В заключение раздела сделаем замечание о первом интеграле уравнений (3.36), существующем в случае стационарного гравитационного поля. При этом g_i не зависят от t и первый интеграл вида (1.67) справедлив на всей оптимальной траектории, т. е.

$$\lambda_i \dot{v}_i + \lambda_{i+3} \dot{x}_i + \lambda_7 \dot{M} = C, \quad (3.37)$$

где C — одна и та же постоянная для всей траектории. Подставляя выражения для производных по времени, λ_{i+3} , λ_7 и l_i из (3.1) — (3.3), (3.9), (3.29) и (3.22) соответственно, запишем первый интеграл в виде

$$\lambda_i g_i - \dot{\lambda}_i v_i + \kappa m = C. \quad (3.38)$$

В векторной записи это означает

$$\mathbf{p} \cdot \mathbf{g} - \dot{\mathbf{p}} \cdot \mathbf{v} + \kappa m = C, \quad (3.39)$$

где $\mathbf{v}$ — скорость ракеты.

На пассивном участке $m = 0$, на дуге промежуточной тяги $\kappa = 0$, так что в этих случаях (3.39) сводится к

$$\mathbf{p} \cdot \mathbf{g} - \dot{\mathbf{p}} \cdot \mathbf{v} = C. \quad (3.40)$$

3.2. Импульсная тяга

Полагая $\bar{m} \rightarrow \infty$, приближаемся к случаю, когда резерв тяги ракетного двигателя неограничен. Участок максимальной тяги в этом случае заменяется отрезком импульсной тяги пренебрежимо малой длины, на котором изменяется только скорость аппарата, но не его положение. В задачах о межпланетных перелетах при помощи обычных ракет, способных развивать тягу, сравнимую по величине с земным весом аппарата, длительность участка максимальной тяги всегда мала по сравнению с общим временем перелета к планете назначения. Поэтому с целью расчета оптимальной траектории можно пренебречь движением ракеты на этих участках, заменив их импульсами тяги. В этом случае можно считать $\bar{m}$ бесконечным и упростить результаты предыдущего раздела.

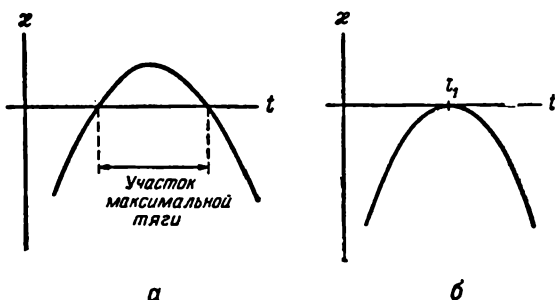
В дальнейшем будем называть точку приложения импульса тяги на оптимальной траектории *точкой соединения*. В этой точке координаты ракеты x_i являются непрерывными функциями t , в силу чего непрерывны и коэффициенты $\partial g_j / \partial x_i$ в определяющих компоненты базиса уравнениях (3.15). Из них также следует, что базис и его первая и вторая производные по времени непрерывны в точке соединения. Однако его третья производная, определяемая уравнением

$$\ddot{\lambda}_i = \dot{\lambda}_j \frac{\partial g_j}{\partial x_i} + \lambda_j \left(\frac{\partial^2 g_j}{\partial x_i \partial x_k} \dot{x}_k + \frac{\partial^2 g_j}{\partial x_i \partial t} \right), \quad (3.41)$$

является в общем случае разрывной из-за разрывности $\dot{x}_k$.

Рассмотрим участок максимальной тяги, окаймленный с обеих сторон пассивными участками. Как известно, на участке максимальной тяги $\kappa \geq 0$, вследствие чего график функции переключения имеет вид,

представленный на рис. 3.1, а. Начнем увеличивать величину тяги, сокращая длину интервала ее действия с целью приближения к условию импульсной тяги. Тогда оказывается, что график κ в пределе должен иметь вид, показанный на рис. 3.1, б. Это означает,



Р и с. 3.1.

что в момент приложения импульса тяги $t=t_1$ необходимо, чтобы

$$\kappa = \dot{\kappa} = 0, \quad (3.42)$$

т. е. κ должна иметь максимум. Результат не меняется, если один или оба участка нулевой тяги заменяются участком промежуточной тяги, на котором $\kappa=0$ тождественно.

Поскольку изложенные рассуждения не исключают полностью возможность того, что $t=t_1$ может оказаться точкой возврата кривой $\kappa(t)$, проведем доказательство более строго. Для рассматриваемой нами задачи уравнение (1.63) принимает вид

$$\frac{dF}{dt} = -\lambda_t \frac{\partial g_t}{\partial t}. \quad (3.43)$$

Интегрируя (3.43) на бесконечно малом отрезке действия импульсной тяги и учитывая, что правая часть этого уравнения остается конечной величиной всюду на этом интервале времени, получаем

$$F^+ - F^- = 0, \quad (3.44)$$

где F^- , F^+ — значения функции F слева и справа от точки приложения импульса. Таким образом, F непрерывна в точке приложения импульса. В то же время на оптимальной траектории

$$F = -\lambda_i g_i + \dot{\lambda}_i v_i - \kappa m. \quad (3.45)$$

Так как на участках НТ и ПТ $\kappa m = 0$, то величина κm должна обращаться в нуль слева и справа от точки приложения импульса. Аналогично λ_i и g_i непрерывны в точке соединения. Отсюда следует непрерывность $\dot{\lambda}_i v_i$ в точке приложения импульса, иначе говоря,

$$\dot{\lambda}_i v_i^- = \dot{\lambda}_i v_i^+,$$

или

$$\dot{\lambda}_i (v_i^+ - v_i^-) = 0, \quad (3.46)$$

так как $\dot{\lambda}_i$ также непрерывны в точке приложения импульса. Как известно, направления импульса и базиса совпадают, поэтому

$$v_i^+ - v_i^- = \beta \lambda_i, \quad (3.47)$$

где $\beta (\neq 0)$ — коэффициент пропорциональности. Таким образом, (3.46) эквивалентно соотношению

$$\lambda_i \dot{\lambda}_i = 0,$$

или

$$\dot{\rho} = 0. \quad (3.48)$$

Тогда из (3.32) вытекает, что $\dot{\kappa} = 0$.

Если импульс прикладывается на одном из концов траектории, приведенные рассуждения теряют силу и условие (3.48) неверно.

Рассмотрим участок НТ, соединяющий две точки соединения. Если в одной из этих точек $\rho = P$, то соотношение (3.34) справедливо всюду на этом участке, и так как в точке соединения $\kappa = 0$, то на всем участке

$$\kappa = \frac{c}{M} (\rho - P). \quad (3.49)$$

Отсюда следует, что и во второй точке соединения $\rho = P$. Итак, если оптимальная траектория состоит из

дуг НТ, разделенных только точками соединения, то во всех таких точках $p=P$ и соотношение (3.49) справедливо на каждом участке НТ. На участке ПТ $\kappa=0$ и $p=\text{const}$; что касается значений κ и p , дуга ПТ в точности подобна точке соединения, так что наличие такого рода участков никоим образом не влияет на ход предыдущих рассуждений. Теперь все условия, которым должна удовлетворять функция переключения κ , можно выразить через p . Потребуем, чтобы условие $p=P$ выполнялось во всех точках соединения и на всех участках ПТ и чтобы на каждом участке НТ имело место $p \leq P$. Если эти условия удовлетворяются, то в силу непрерывности κ из (3.32), (3.49) вытекает, что $\kappa=0$ во всех точках соединения и на каждом участке ПТ и $\kappa \leq 0$ на всех участках НТ. Окончательно потребуем выполнения условия $p=0$ во всех точках соединения; согласно (3.32), это означает, что $\dot{\kappa}=0$, т. е. действительно имеет место (3.42) (это условие заменяет условие $\kappa \geq 0$, характерное для дуги максимальной тяги в общем случае).

Таким образом, при наличии на оптимальной траектории импульсов тяги должны выполняться следующие условия:

- а) Базис и его первая производная по времени непрерывны всюду.
- б) На любом активном участке вектор тяги совпадает с базисом, модуль которого должен равняться некоторой постоянной величине P .
- в) На любом участке НТ модуль p базиса не должен превышать P .
- г) $\dot{p}=0$ во всех точках соединения, не совпадающих с конечными точками.

Впервые эти условия были установлены автором [1, 2, 4, 5].

Условие (в) означает, что p принимает максимальное значение P в каждой точке соединения на любом участке ПТ. Условие (г) эквивалентно требованию

$$\lambda_i \dot{\lambda}_i = 0, \quad (3.50)$$

или

$$p \cdot \dot{p} = 0, \quad (3.51)$$

т. е. базис и его первая производная ортогональны в точке соединения.

Ранее в этом разделе было доказано, что условие (г) эквивалентно требованию непрерывности функции Лагранжа в точке соединения. В случае, когда гравитационное поле стационарно и для определения оптимальной траектории используется первый интеграл (3.38), постоянство C на всей траектории гарантирует непрерывность F во всех точках соединения и условие (г) тогда излишне.

Максимальное значение P модуля базиса часто определяется краевыми условиями. К их рассмотрению мы и переходим в следующем разделе.

3.3. Частные случаи краевых условий

Рассмотрим форму, которую принимают конечные условия (3.17), (3.18), применительно к двум задачам, представляющим практический интерес.

Остановимся сначала на задаче определения маневра по наиболее экономичному уходу ракеты из данного гравитационного поля (предполагаемого стационарным). Примем, что тело покидает пределы поля при условии, что его полная энергия (кинетическая плюс потенциальная) превышает потенциальную энергию тела в бесконечности, т. е. на бесконечно большом расстоянии от всех гравитирующих тел, порождающих поле. Следовательно, задачу можно сформулировать следующим образом: ракета запускается из фиксированной точки поля с заданной скоростью, и ее конечная масса M_1 (по израсходованию всего запаса топлива) также известна. Значения x_i и v_i при $t=t_1$ не определены заранее, но требуется совершить маневр таким образом, чтобы полная энергия аппарата

$$M \left[V(x_1, x_2, x_3) + \frac{1}{2}(v_1^2 + v_2^2 + v_3^2) \right] \quad (3.52)$$

в момент $t=t_1$ была максимальной. Здесь V — потенциальная функция поля. Время t_1 достижения конечной точки траектории считается свободным для выбора.

Так как M_1 известно, будем минимизировать величину

$$J = -V - \frac{1}{2}(v_1^2 + v_2^2 + v_3^2), \quad (3.53)$$

где все значения вычисляются в момент $t=t_1$. Согласно (1.46), при $t=t_1$ должны выполняться соотношения

$$\left. \begin{aligned} \lambda_1 &= v_1, & \lambda_2 &= v_2, & \lambda_3 &= v_3, \\ \lambda_4 &= \frac{\partial V}{\partial x_1}, & \lambda_5 &= \frac{\partial V}{\partial x_2}, & \lambda_6 &= \frac{\partial V}{\partial x_3}. \end{aligned} \right\} \quad (3.54)$$

Поскольку $\partial V / \partial x_i = -g_i$, эти условия эквивалентны следующему требованию ($t=t_1$):

$$\mathbf{p} = \mathbf{v}, \quad \dot{\mathbf{p}} = \mathbf{g}. \quad (3.55)$$

Кроме того, из условия (1.47) в момент $t=t_1$ следует

$$\lambda_i \dot{v}_i + \lambda_{i+3} \dot{x}_i + \lambda_7 \dot{M} = 0. \quad (3.56)$$

Согласно (3.37), очевидно, что уравнение (3.56) представляет собой первый интеграл на оптимальной траектории, справедливый во всех ее точках. Ему можно придать форму

$$\mathbf{p} \cdot \mathbf{g} - \dot{\mathbf{p}} \cdot \mathbf{v} + \kappa m = 0, \quad (3.57)$$

которая была введена в связи с уравнением (3.37). Поскольку при $t=t_1$ справедливы соотношения (3.55), уравнение (3.57) в этот момент приводится к виду

$$\kappa m = 0. \quad (3.58)$$

На дуге НТ полная энергия аппарата остается постоянной. Поэтому произвольный маневр ухода можно продолжить при помощи произвольной по длительности дуги такого вида. Это наводит на мысль, что если условия (3.55), (3.58) удовлетворяются в какой-либо одной точке участка НТ, они удовлетворяются во всех точках этого участка. Поскольку $m=0$, условие (3.58) здесь тривиально. Допустим, что на участке НТ мы выбрали базис, тождественно равный вектору скорости:

$$\lambda_i = v_i. \quad (3.59)$$

Тогда из уравнений движения (3.1) следует, что на дуге НТ

$$\dot{\lambda}_i = g_i. \quad (3.60)$$

Уравнения (3.15) для базиса удовлетворяются тогда при условии

$$\dot{g}_i = v_j \frac{\partial g_j}{\partial x_i}. \quad (3.61)$$

Однако

$$v_j \frac{\partial g_j}{\partial x_i} = \dot{x}_j \frac{\partial^2 V}{\partial x_i \partial x_j} = \dot{x}_j \frac{\partial g_j}{\partial x_i} = \dot{g}_i. \quad (3.62)$$

Отсюда следует, что соотношение (3.59) является возможным решением, которое определяет базис на дуге НТ. Поскольку базис описывается векторными уравнениями второго порядка, решение последнего однозначно определяется, как только заданы значения базиса и его первой производной в одной точке. Так как решение (3.59) удовлетворяет условиям (3.55), оно является истинным решением на заключительной дуге НТ.

В силу сказанного отбросим возможность, заключающуюся в том, что конечный участок траектории является пассивным, и предположим, следовательно, что m не обращается в нуль при $t=t_1$. Тогда из условия (3.58) в конечный момент имеем

$$\kappa = 0. \quad (3.63)$$

Так как при $t=t_1$ двигатель работает, конец интервала движения должен совпасть с моментом полного выгорания топлива, и первое из условий (3.55) показывает, что в этой точке тяга направлена по вектору скорости [3].

Если импульсная тяга допустима, траектория должна заканчиваться либо точкой соединения, либо участком промежуточной тяги. В любом случае в конце $\kappa=0$, согласно условию (3.63), и мы не получаем ничего нового по сравнению с утверждениями (а) — (г), установленными на стр. 76. Здесь уместно заметить, что все эти условия весьма естественно и просто

выполняются в частном случае, когда начальное движение ракеты перпендикулярно силовому полю. В предположении, что все топливо мгновенно расходуется в начальный момент, результирующая импульсная тяга должна быть направлена по вектору скорости. Тогда вся траектория представляет собой одну изолированную точку соединения, в которой базис и его производная определяются уравнениями (3.55). Отсюда

$$\mathbf{p} \cdot \dot{\mathbf{p}} = \mathbf{v} \cdot \mathbf{g} = 0, \quad (3.64)$$

так как $\mathbf{v}$ и $\mathbf{g}$ перпендикулярны. Это означает, что $\dot{p}=0$, как того требует условие (г). Условие (б) также, очевидно, выполняется, а условия (а) и (в) являются лишними. Следовательно, этот элементарный маневр является кандидатом в класс оптимальных маневров. В частности, рассмотрим аппарат, который обращается вначале по круговой орбите вокруг притягивающего тела со сферической симметрией. Для выполнения маневра по уходу из сферы притяжения можно приложить импульс тяги в любой точке орбиты по касательной к ней. Если импульс имеет достаточную величину, ракета удалится на бесконечность по ветви гиперболы. Такой маневр ухода удовлетворяет всем нашим условиям оптимальности; однако позднее будет показано (стр. 132), что если в качестве точки старта выбрать предшествующую моменту соединения точку круговой орбиты, включив тем самым последнюю в оптимальную траекторию, то тогда на этой орбите не будет выполняться условие (в), как только конечная скорость ухода превысит некоторую критическую величину. Доказано, что в этом случае более экономичным оказывается некоторый альтернативный маневр.

Вторая задача посвящена минимизации характеристической скорости маневра, который переводит ракету из одного заданного положения в другое. Скорость аппарата в обеих конечных точках предполагается заданной. Тогда на основании (2.7) имеем

$$J = c \ln \frac{M_0}{M_1} \quad (3.65)$$

и условие (1.46) означает, что при $t=t_1$

$$\lambda_7 = \frac{c}{M_1}. \quad (3.66)$$

Если время перелета не фиксировано, то, согласно (1.47), в конечной точке должно быть

$$\lambda_i g_i - \dot{\lambda}_i v_i - \kappa m = 0. \quad (3.67)$$

В случае стационарного поля (3.67) справедливо на всей траектории.

С учетом (3.29) из условия (3.66) вытекает, что при $t=t_1$

$$\kappa = \frac{c}{M} (p - 1). \quad (3.68)$$

Теперь предположим, что импульсная тяга допустима. Тогда, если заключительный подинтервал представляет собой дугу НТ, соотношение (3.49) справедливо всюду на этом участке и (3.68) удовлетворяется при условии

$$P = 1. \quad (3.69)$$

Если конечный подинтервал есть дуга ПТ, то на ней $\kappa=0$ и $p=P$ и снова условие (3.68) может выполняться только при $P=1$. Отсюда заключаем, что оптимальная траектория перелета удовлетворяет условиям (а)—(г) (стр. 76) при $P=1$. Таким образом, на любом активном участке базис является *единичным* вектором в направлении тяги.

ЛИТЕРАТУРА

1. Lawden D. F., Minimal rocket trajectories, *J. Amer. Rocket Soc.*, 23, № 6, 360—382 (1953).
2. Lawden D. F., Stationary rocket trajectories, *Quart. J. Mech.*, 7, № 4, 488—504 (1954).
3. Lawden D. F., Optimal programming of rocket thrust direction, *Astronaut. Acta*, 1, № 1, 41—56 (1955).
4. Lawden D. F., Interplanetary rocket trajectories, *Advances in Space Science*, Vol. 1, Chap. 1, New York, Academic Press, 1959.
5. Lawden D. F., Optimal intermediate-thrust arcs in a gravitational field, *Astronaut. Acta*, 8, № 2-3, 106, 123 (1962).
6. Leitmann G., Extremal rocket trajectories in position and time dependent force fields, *Amer. Astronaut. Soc. 7th Ann. Meeting*, Dallas, Preprint, 61-30, 1961.

Упражнения

1. Показать, что если в любой точке с полярным вектором $\mathbf{g}$ относительно начала координат O гравитационное ускорение дается выражением

$$\mathbf{g} = -\omega^2 \mathbf{r},$$

то всюду на оптимальной траектории в указанном поле базис определяется соотношением

$$\mathbf{p} = \mathbf{a} \cos \omega t + \mathbf{b} \sin \omega t,$$

где $\mathbf{a}$, $\mathbf{b}$ — векторные константы. Показать, что $\mathbf{p}$ -траектория есть эллипс, круг или прямая линия.

Показать также, что если траектория представляет собой дугу ПТ, то $\mathbf{p}$ -траектория есть круг, величина тяги не определена и вектор тяги вращается в плоскости с постоянной угловой скоростью ω .

Доказать, что если $\mathbf{p}$ -траектория не является кругом и допустима импульсная тяга, то существуют только две точки приложения импульса, причем соединяющая их линия проходит через O , а направления вектора тяги в этих точках контрколлинеарны.

Показать, что если дуга НТ оптимальной траектории описывается уравнением

$$\mathbf{r} = \mathbf{A} \cos \omega t + \mathbf{B} \sin \omega t$$

и время перелета не фиксировано заранее, то

$$\mathbf{a} \cdot \mathbf{A} + \mathbf{b} \cdot \mathbf{B} = 0.$$

2. Доказать, что если в произвольной точке соединения участков экстремали разных типов не приложена импульсная тяга, то вторая и третья производные базиса по времени в ней непрерывны, в то время как четвертая нет.

Показать, что в этой точке

$$\left| \frac{d^4 q}{dt^4} \right| = 2p \cdot \left| \frac{d^4 p}{dt^4} \right|,$$

где $q = p^2 a |x|$ — величина скачка x в точке соединения.

Вывести отсюда, что в любой точке перехода аппарата с дуги ПТ на дугу НТ имеет место соотношение

$$\frac{d^4 q}{dt^4} = -2f \lambda_i \lambda_j \lambda_k \frac{\partial^2 g_j}{\partial x_i \partial x_k},$$

где f — реактивное ускорение аппарата в конечной точке дуги ПТ.

4. ОПТИМАЛЬНЫЕ ТРАЕКТОРИИ В ОДНОРОДНОМ ПОЛЕ

4.1. Общая теория

Лейтман [3] показал, что для случая однородного гравитационного поля можно построить весьма законченную теорию широкого класса задач оптимизации ракетных траекторий.

В этом случае $\mathbf{g}$ является константой и дифференциальное уравнение (3.36) для базиса сводится к простому виду

$$\ddot{\mathbf{p}} = 0, \quad (4.1)$$

общее решение которого очевидно:

$$\mathbf{p} = \mathbf{a}t + \mathbf{b}. \quad (4.2)$$

Здесь $\mathbf{a}$, $\mathbf{b}$ — векторные постоянные. Поскольку $\mathbf{p}$, $\dot{\mathbf{p}}$ непрерывны всюду на оптимальной траектории, $\mathbf{a}$ и $\mathbf{b}$ принимают одни и те же значения на всех подинтервалах и $\mathbf{p}$ -траектория является прямой, которую с постоянной скоростью $\mathbf{a}$ описывает изображающая точка. В частном случае, когда $\mathbf{a}$ равно нулю, $\mathbf{p}$ -траектория вырождается в изолированную точку, а направление тяги остается неизменным на всем протяжении маневра. В общем направление тяги будет изменяться в плоскости, содержащей $\mathbf{p}$ -траекторию и начало координат. Пусть Ox_1 , Ox_2 — оси, параллельные этой плоскости. Тогда компоненты базиса определяются соотношениями вида

$$\lambda_1 = a_1 t + b_1, \quad \lambda_2 = a_2 t + b_2, \quad \lambda_3 = 0, \quad (4.3)$$

где a_i и b_i — константы. Далее угол θ , который направление тяги составляет с осью Ox_1 в момент t , дается выражением

$$\operatorname{tg} \theta = \frac{\lambda_2}{\lambda_1} = \frac{a_2 t + b_2}{a_1 t + b_1}. \quad (4.4)$$

Это — *дробно-линейная зависимость* тангенса угла ориентации тяги в однородном поле, которая уже фигурировала в разд. 2.2 [уравнение (2.24)]. Поскольку $\lambda_3 = 0$, вектор тяги имеет нулевую компоненту в направлении оси Ox_3 и параллельное этой оси движение ракеты должно быть свободным падением под действием гравитации.

Легко доказать, что оптимальная траектория может содержать участок ПТ только при особых обстоятельствах. На таком участке, как показано в разд. 3.1, базис должен иметь постоянную длину [уравнение (3.35)]. Тогда p -траектория не может быть прямой линией; следовательно, она должна сводиться к точке и направление тяги должно быть неизменно в течение всего маневра. Поскольку в данном случае l_i принимают постоянные значения, уравнения движения (3.1) — (3.3) элементарно интегрируются на интервале (t_0, t_1) маневра и при начальных условиях (3.7) дают

$$v_{i1} - v_{i0} = c l_i \ln R + g_i (t_1 - t_0), \quad (4.5)$$

$$x_{i1} - x_{i0} = c l_i S + v_{i0} (t_1 - t_0) + \frac{1}{2} g_i (t_1 - t_0)^2, \quad (4.6)$$

где

$$R = \frac{M_0}{M_1}, \quad S = \int_{t_0}^{t_1} \ln \frac{M_0}{M} dt. \quad (4.7)$$

Тут величины

$$v_{i1} - v_{i0} - g_i (t_1 - t_0), \quad i = 1, 2, 3, \quad (4.8)$$

очевидно, должны находиться в тех же отношениях одна к другой, что и величины

$$x_{i1} - x_{i0} - v_{i0} (t_1 - t_0) - \frac{1}{2} g_i (t_1 - t_0)^2. \quad (4.9)$$

Однако это требование часто исключается конечными условиями, и тогда участок ПТ не может входить в состав оптимальной траектории. С другой стороны, если уравнения (4.5), (4.6) не противоречат конечным условиям, очевидно, что одной и той же совокупности значений x_{i1} , v_{i1} и J может соответствовать произволь-

ное число различных программ регулирования величины тяги. Это означает, что программа регулирования величины тяги в этом случае не будет единственной.

Предполагая, что конечные условия исключают возможность реализации участка ПТ, получаем, что оптимальная траектория состоит только из дуг НТ и МТ. Покажем, что может быть не более трех таких участков. Этот результат принадлежит Лейтману [3]¹⁾.

Рассмотрим сначала случай, когда p -траектория — прямая, не проходящая через начало координат. Поскольку p — расстояние изображающей точки от начала координат, p сначала уменьшается до минимума, а затем монотонно возрастает. Таким образом, согласно (3.32), производная $\dot{\chi}$ сначала меньше нуля, потом обращается в нуль и в конце становится положительной. Следовательно, χ сначала монотонно убывает до минимального значения, а затем монотонно возрастает. Из (3.32) следует непрерывность функций $\dot{\chi}$ и χ , вследствие чего график χ в зависимости от t может пересекать ось t не более чем в двух точках. Ввиду того что χ обращается в нуль в каждой точке сопряжения двух подинтервалов различного типа, это означает, что самое большее две такие точки могут находиться на оптимальной траектории и, следовательно, максимальное число таких подинтервалов равно трем. Далее, если число интервалов действительно равно трем, на первом χ положительно, на втором — отрицательно и на третьем — снова положительно. Значит, дуга НТ с обеих сторон замыкается участками МТ.

Теперь рассмотрим частный случай, когда p -траектория проходит через начало координат. Пусть W — скорость, с которой изображающая точка движется по этой прямой. Тогда

$$\left. \begin{aligned} \dot{p} &= -W, & t < \tau, \\ \dot{p} &= +W, & t > \tau, \end{aligned} \right\} \quad (4.10)$$

¹⁾ Окончательное решение этого вопроса дано в работе [6] (см. также [7]), — *Прим. перев.*

где $t=\tau$ — момент прохождения точки через начало координат. Тогда из (3.32) получаем

$$\left. \begin{aligned} \dot{\kappa} &= -\frac{cW}{M}, & t < \tau, \\ \dot{\kappa} &= +\frac{cW}{M}, & t > \tau. \end{aligned} \right\} \quad (4.11)$$

Следовательно, $\dot{\kappa}$ нигде не обращается в нуль. В этом случае κ разрывна при $t=\tau$, будучи отрицательной до этого момента и положительной после него. Поэтому κ монотонно убывает при $t<\tau$ и монотонно возрастает при $t>\tau$, и ее график может пересечь ось времени самое большее в двух точках. Отсюда следует тот же вывод, что и раньше.

Конечные условия (1.46), (1.47) зависят только от величины J , подлежащей минимизации, и должны быть записаны отдельно для каждой конкретной задачи. Это мы сделаем в примерах, которым посвящен следующий раздел.

4.2. Частные задачи

В наших первых трех примерах рассматривается движение ракеты в вертикальной плоскости. Oxy означает прямоугольную систему осей, лежащих в этой плоскости, причем Ox — горизонтальная ось, а ось Oy направлена вертикально вверх. Обозначим параллельные этим осям компоненты скорости через u , v . Тогда λ_x и т. д. представляют собой множители Лагранжа, соответствующие фазовым координатам x , y , u , v , M соответственно. Поэтому базис обладает компонентами λ_u , λ_v , а его производная — компонентами $-\lambda_x$, $-\lambda_y$. Пусть $t=0$ — точка старта, а $t=T$ — момент завершения маневра. Обозначим через θ угол, образуемый вектором тяги с осью Ox .

Положим вначале, что ракета запускается из начала координат с нулевой начальной скоростью, а программы ориентации тяги и расхода топлива выбираются таким образом, чтобы конечная высота была

максимальной. В качестве минимизируемой величины возьмем

$$J = -y_1. \quad (4.12)$$

В момент $t=T$ все топливо израсходовано, т. е. задано значение

$$M = M_1. \quad (4.13)$$

Величины u_1, v_1, x_1, y_1, T все свободны, поэтому конечные условия (1.46) и (1.47) требуют, чтобы при $t=T$ выполнялись связи

$$\lambda_u = \lambda_v = \lambda_x = 0, \quad \lambda_y = 1, \quad (4.14)$$

$$\lambda_u \dot{u} + \lambda_v \dot{v} + \lambda_x \dot{x} + \lambda_y \dot{y} + \lambda_M \dot{M} = 0. \quad (4.15)$$

Уравнение (4.2) совместно с условием (4.14) означает, что

$$\lambda_u = 0, \quad \lambda_v = T - t, \quad \lambda_x = 0, \quad \lambda_y = 1. \quad (4.16)$$

Таким образом, базис направлен по положительной оси λ_v и по мере движения уменьшается по величине от T до 0. Значит, р-траектория представляет собой отрезок оси λ_v от точки $(0, T)$ до начала координат. Тяга всегда направлена вертикально вверх, следовательно, $0 = \pi/2$. Движение происходит вдоль оси Oy .

Из (3.32) следует, что

$$\dot{\kappa} = -\frac{c}{M}, \quad (4.17)$$

значит κ всюду убывает и график κ может пересечь ось t не более одного раза. Поэтому либо $\kappa > 0$ всюду и оптимальная траектория состоит из одной дуги МТ, либо $\kappa > 0$ в начале движения и $\kappa < 0$ в конце и тогда оптимальная траектория состоит из участка МТ, за которым следует участок НТ.

При $t=T$ модуль базиса p равен нулю, а из (3.29) следует, что $\kappa = -\lambda_M$. Условие (4.15) тогда требует, чтобы при $t=T$ имело место

$$\dot{y} = \kappa \dot{M}. \quad (4.18)$$

Если траектория представляет собой одну дугу МТ, то при $t=T$ $\kappa \geq 0$ и $\dot{M} < 0$. Отсюда получаем, что $\dot{y} \leq 0$

в конечный момент, а это может быть в случае, если в начале движения тяга двигателя меньше веса ракеты. Эта возможность, очевидно, нереальна, и потому в любом представляющем практический интерес случае оптимальная программа регулирования величины тяги будет состоять из начального этапа максимальной тяги, завершающейся полным выгоранием горючего, за которым следует баллистический этап свободного движения к вершине траектории под действием силы тяжести.

В нашем втором примере мы предположим, что ракета стартует из начала координат с компонентами скорости u_0, v_0 , и требуется запрограммировать полет таким образом, чтобы конечная скорость аппарата была как можно больше. Итак, примем

$$J = -(u_1^2 + v_1^2)^{1/2} \quad (4.19)$$

и будем минимизировать J . При $t=T$ дано

$$M = M_1, \quad (4.20)$$

но u_1, v_1, x_1, y_1 свободны для выбора. Величину T будем считать заданной заранее.

Конечные условия (1.46) для момента $t=T$ устанавливают следующие соотношения:

$$\left. \begin{aligned} \lambda_u &= \frac{u_1}{(u_1^2 + v_1^2)^{1/2}} = \cos \psi, \\ \lambda_v &= \frac{v_1}{(u_1^2 + v_1^2)^{1/2}} = \sin \psi, \\ \lambda_x &= \lambda_y = 0, \end{aligned} \right\} \quad (4.21)$$

где ψ — угол, образуемый вектором конечной скорости аппарата с осью Ox . Следовательно, производная базиса равна нулю и уравнение (4.2) показывает, что условия (4.21) справедливы всюду на траектории.

Компоненты λ_u, λ_v являются константами, а базис представляет собой единичный вектор, образующий постоянный угол с осью λ_u . Следовательно, $\theta = \psi$ и ориентация тяги нигде не меняется; p -траектория есть изолированная точка, и поэтому в данном случае

возможен участок ПТ с произвольной программой регулирования величины тяги. Здесь приложимы условия (4.5), которые в наших новых обозначениях принимают вид

$$u_1 = u_0 + c \cos \psi \ln R, \quad (4.22)$$

$$v_1 = v_0 - gT + c \sin \psi \ln R, \quad (4.23)$$

где ψ определяется из уравнения

$$\operatorname{tg} \psi = \frac{v_1}{u_1}. \quad (4.24)$$

Подставляя u_1 , v_1 из (4.22), (4.23), находим, что угол ψ должен быть таков, чтобы

$$\operatorname{tg} \psi = \frac{v_0 - gT}{u_0}. \quad (4.25)$$

При указанном значении ψ уравнения (4.22), (4.23) дают

$$(u_1^2 + v_1^2)^{1/2} = [u_0^2 + (v_0 - gT)^2]^{1/2} + c \ln R. \quad (4.26)$$

откуда следует, что J не зависит от выбора программы регулирования величины тяги.

Пусть в нашей третьей задаче программа должна максимизировать горизонтальную дальность x_1 полета ракеты, стартующей из начала координат с нулевой начальной скоростью. Предположим, что в заданный момент аппарат достигает своего конечного положения с заданными значениями горизонтальной скорости и массы, т. е. T , u_1 и M_1 все фиксированы. Приняв

$$J = -x_1, \quad (4.27)$$

получим при $t=T$ из конечных условий (1.46)

$$\lambda_v = \lambda_y = 0, \quad \lambda_x = 1. \quad (4.28)$$

Из (4.2) имеем

$$\lambda_u = \tau - t, \quad \lambda_v = 0, \quad \lambda_x = 1, \quad \lambda_y = 0, \quad (4.29)$$

где τ — дополнительная неизвестная константа.

Базис направлен по оси λ_u в положительную сторону, если $t < \tau$, и в отрицательную, если $t > \tau$. Таким

образом, $\theta=0$ или π и p -траектория состоит из отрезка оси λ_u между точками $(\tau, 0)$ и $(\tau - T, 0)$. Поскольку λ_u, λ_v оба обращаются в нуль при $t=\tau$, в этом случае κ может терпеть разрыв. Из (4.11) мы находим

$$\left. \begin{aligned} \dot{\kappa} &= -\frac{c}{M}, & t < \tau, \\ \dot{\kappa} &= +\frac{c}{M}, & t > \tau. \end{aligned} \right\} \quad (4.30)$$

Таким образом, до момента $t=\tau$ κ убывает, после чего начинает возрастать. Соответствующий график представлен на рис. 4.1, *а* или *б*. Если рис. 4.1 корректен, то $\kappa > 0$ всюду и участок максимальной горизонтальной тяги, направленной в сторону положительной

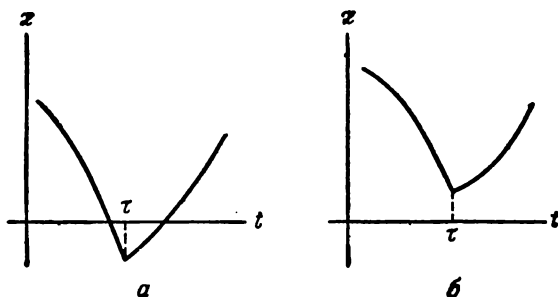


Рис. 4.1.

полуоси, без паузы сменяется участком максимальной тяги, действующей в противоположную сторону. Продолжительность полного выгорания горючего полностью определяется известным значением максимального секундного расхода и в общем отлична от требуемой величины T . Таким образом, нормальный случай представлен на рис. 4.1, *а*: участок максимальной тяги, на котором $\theta=0$, сменяется участком нулевой тяги, за которым в свою очередь следует второй участок максимальной тяги, на котором $\theta=\pi$.

Интегрирование уравнения горизонтальной компоненты движения (при $\theta=0$ или π) показывает, что

конечная горизонтальная скорость в результате двух активных участков равна

$$u_1 = c \ln \frac{M_0}{M_i} - c \ln \frac{M_i}{M_1} = c \ln \frac{M_0 M_1}{M_i^2}, \quad (4.31)$$

где M_i — масса ракеты в конце первого активного участка. При условии, что данное значение u_1 не превосходит по величине $c \ln R$, это уравнение определяет M_i в диапазоне $M_0 > M_i > M_1$. Оптимальная траектория теперь полностью определена, продолжительность пассивного участка равна разности между полным временем T и промежутком, необходимым для сгорания всего топлива с максимальным секундным расходом.

В заключение рассмотрим задачу о перелете ракеты с минимальным расходом топлива между двумя фиксированными точками в однородном поле. Будем считать, что время движения задано и допустима импульсная тяга. По предположению значения скорости аппарата на концах интервала движения известны и таковы, что условия (4.5) и (4.6) не могут выполняться одновременно. В этом случае в состав оптимальной траектории не может входить участок ПТ и траектория ракеты должна быть сформирована из участков НТ, сопрягающихся в точках соединения; р-траектория не может вырождаться здесь в изолированную точку и представляет собой прямую линию, которую описывает изображающая точка при движении с постоянной скоростью. Отсюда следует, что p может иметь не более одного стационарного значения, причем последнее является минимумом. Выше, однако, было доказано, что в точках соединения, не совпадающих с концами интервала движения, p должно принимать максимальное значение, равное единице. Отсюда заключаем, что иных точек соединения, кроме концов интервала движения, быть не может. Если соединение имело бы место только на одном из концов, это означало бы, что возможен оптимальный перелет без вариации направления тяги, что в действительности соответствует особому случаю, когда одновременно выполняются условия (4.5), (4.6). Таким образом, оба

конца являются точками соединения, и нетрудно доказать, что импульсы, которые должны в них прикладываться, однозначно определяются краевыми условиями и временем перелета. Элементарный анализ этой проблемы читатель может найти у Лоудена [2], а детальное доказательство того факта, что рассмотренный только что тип перелета является абсолютной экстремалью, — у Эвинга [1].

ЛИТЕРАТУРА

1. Ewing G. M., A fundamental problem of navigation in free space, *Quart. Appl. Math.*, 18, № 4, 355—362 (1961).
2. Lawden D. F., Mathematical problems of astronautics, *Math. Gaz.*, 41, № 337, 168—179 (1957).
3. Leitmann G., On a class of variational problems in rocket flight, *J. Aeronaut. Sci.*, 26, № 9, 586—591 (1959).
- 4*. Охочимский Д. Е., Энеев Т. Н., Некоторые вариационные задачи, связанные с запуском искусственного спутника Земли, *Усп. физич. наук*, 63, вып. 1а (1957).
- 5*. Исаев В. К., Принцип максимума Л. С. Понтрягина и оптимальное программирование тяги ракет, *Автоматика и телемеханика*, 22, № 8 (1961).
- 6*. Исаев В. К., Дополнение к работе «Принцип максимума Л. С. Понтрягина и оптимальное программирование тяги ракет», *Автоматика и телемеханика*, 23, № 1 (1962).
- 7*. Leitmann G., Note on «A class of variational problems in rocket flight», *J. Aero/Space Sci.*, 29, № 8 (1962).

Упражнения

1. Пусть x_0 , x_1 — векторные координаты точек отправления и назначения в однородном поле с гравитационным ускорением g , а v_0 , v_1 — скорости в этих точках соответственно. Показать, что p -траектория лежит в плоскости, параллельной векторам

$$x_1 - x_0 - v_0 T - \frac{1}{2} g T^2,$$

$$v_1 - v_0 - g T,$$

где T — время перелета.

2. Пусть v — текущая скорость ракеты; геометрическое место точек, образуемых концом вектора v при движении аппарата, называется его *годографом*. Показать, что в случае отсутствия гравитационного поля отношение R начальной массы к значению массы в конце маневра связано с длиной L соответствующего маневру годографа соотношением

$$c \ln R = L.$$

3. Используя обозначения разд. 4.1, показать, что задача об оптимальном по расходу топлива перелете между двумя точками при отсутствии поля эквивалентна следующей: соединить две точки A_0, A_1 , заданные радиус-векторами $\mathbf{v}_0, \mathbf{v}_1$ соответственно, годографом минимальной длины, удовлетворяющим дополнительному условию

$$\int_{t_0}^{t_1} \mathbf{v} dt = \mathbf{x}_1 - \mathbf{x}_0.$$

Показать, что последнее условие эквивалентно требованию так распределить массу $t_1 - t_0$ по годографу, чтобы центр масс G оказался в точке с радиус-вектором $(\mathbf{x}_1 - \mathbf{x}_0)/(t_1 - t_0)$. Зафиксировав t_0, t_1 , показать, что годограф оптимального перелета образован двумя отрезками A_0G, GA_1 , откуда следует, что оптимальный перелет совершается путем приложения импульсов тяги в конечных точках. (Указание: для годографа минимальной длины масса $t_1 - t_0$ должна быть сосредоточена в точке G .)

4. Используя обозначения разд. 4.2, рассмотреть задачу максимизации дальности в горизонтальной плоскости, проведенной через точку старта O . Значения начальной и конечной масс M_0, M_1 заданы, полное активное время переменное. Показать, что $\mathbf{p}$ -траектория представляет собой отрезок прямой, проходящей через начало координат, и что модуль базиса монотонно убывает. Показать, что на первом участке секундный расход топлива максимален и вектор тяги составляет постоянный угол с горизонтом; на втором участке совершается баллистический полет,

5. БАЗИС В НЬЮТОНОВОМ ПОЛЕ ТЯГОТЕНИЯ

5.1. Участки нулевой тяги

Предположим, что ракета движется в поле фиксированного центра тяготения O , величина силы притяжения на единицу массы составляет γ/r^2 , где r — расстояние ракеты от центра O . Тогда, как известно, траектории пассивного движения представляют собой кеплеровы конические сечения с фокусом в точке O . Задача настоящего раздела заключается в отыскании формы базиса, соответствующего этой дуге.

Пусть кеплерова дуга представляет собой коническое сечение, лежащее в плоскости x, y инерциальной декартовой системы координат $Oxyz$. В качестве начала отсчета O примем центр тяготения (фокус конического сечения). Пусть r, θ — полярные координаты ракеты, движущейся по орбите относительно полюса O и начального луча Ox , тогда уравнения движения точки можно представить в виде

$$\ddot{r} - r\dot{\theta}^2 = -\frac{\gamma}{r^2}, \quad (5.1)$$

$$r\ddot{\theta} + 2\dot{r}\dot{\theta} = 0. \quad (5.2)$$

В учебниках по классической динамике (см., например, Лоуден, стр. 89, и [6*], стр. 212) показано, что из этих соотношений следует уравнение конической орбиты в форме

$$\frac{l}{r} = 1 + e \cos(\theta - \tilde{\omega}), \quad (5.3)$$

где e — эксцентриситет, l — параметр орбиты и $\tilde{\omega}$ — угловое расстояние *перигентра* (точки наибольшего сближения с центром тяготения). Будем называть $\tilde{\omega}$ *долготой перигентра*. Уравнение (5.2) можно проин-

тегрировать и получить отсюда закон сохранения момента количества движения ракеты относительно центра тяготения

$$r^2 \dot{\theta} = \sqrt{\gamma l}. \quad (5.4)$$

При этом в процессе движения аппарата угловая скорость $\dot{\theta}$ считается положительной. Дифференцируя (5.3) по времени и используя (5.4), получаем следующее уравнение движения:

$$\dot{r} = e \sqrt{\frac{\gamma}{l}} \sin(\theta - \tilde{\omega}). \quad (5.5)$$

Рассмотрим теперь зависимости (3.15), описывающие базис. При выводе соотношения (3.62) было показано, что если существует скалярный потенциал, определяющий поле, то

$$\frac{\partial g_j}{\partial x_i} = \frac{\partial g_i}{\partial x_j}. \quad (5.6)$$

Таким образом, уравнения (3.15) эквивалентны зависимостям

$$\ddot{\lambda}_i = \lambda_j \frac{\partial g_i}{\partial x_j}, \quad (5.7)$$

которые можно представить в векторной форме

$$\ddot{\mathbf{p}} = \mathbf{p} \cdot \nabla \mathbf{g}. \quad (5.8)$$

В подходящем случае это уравнение можно использовать для замены соотношения (3.36). В качестве третьей возможности отметим, что по правилам векторного анализа (см., например, [5] и [7*, стр. 126]) оператор $\mathbf{p} \cdot \nabla$ можно заменить оператором $p \partial / \partial s$, где $\partial / \partial s$ означает дифференцирование по направлению $\mathbf{p}$, вследствие чего (5.8) эквивалентно также уравнению

$$\ddot{\mathbf{p}} = p \frac{\partial \mathbf{g}}{\partial s}. \quad (5.9)$$

В рассматриваемом случае

$$\mathbf{g} = - \frac{\gamma}{r^3} \mathbf{r}, \quad (5.10)$$

где $\mathbf{r}$ — радиус-вектор точки, проведенный из полюса O . Отсюда

$$\frac{\partial \mathbf{g}}{\partial s} = \frac{3\gamma}{r^4} \frac{\partial r}{\partial s} \mathbf{r} - \frac{\gamma}{r^3} \frac{\partial \mathbf{r}}{\partial s}. \quad (5.11)$$

Если φ — угол между вектором $\mathbf{r}$ и направлением дифференцирования $\mathbf{p}$, то

$$\frac{\partial r}{\partial s} = \cos \varphi. \quad (5.12)$$

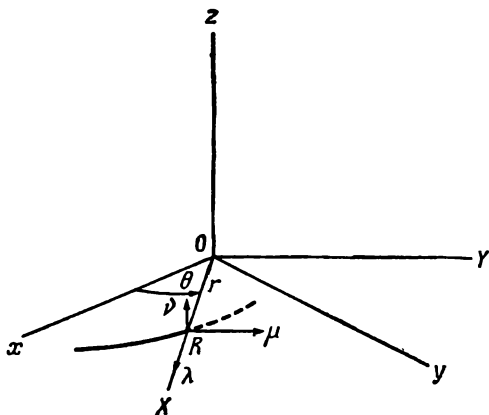
Таким образом,

$$\frac{\partial \mathbf{r}}{\partial s} = \hat{\mathbf{p}}, \quad (5.13)$$

где $\hat{\mathbf{p}}$ — единичный вектор в направлении $\mathbf{p}$. Отсюда

$$\mathbf{p} \frac{\partial \mathbf{g}}{\partial s} = \frac{3\gamma}{r^5} (\mathbf{p} \cdot \mathbf{r}) \mathbf{r} - \frac{\gamma}{r^3} \mathbf{p}. \quad (5.14)$$

Спроектируем уравнения (5.9) на оси прямоугольной декартовой системы OX , OY , Oz , где ось OX направлена по радиус-вектору, соединяющему полюс O



Р и с. 5.1.

с ракетой R , ось OY перпендикулярна OX и проведена в плоскости орбиты по направлению движения; ось Oz введена ранее (рис. 5.1). Пусть λ , μ , ν — проекции вектора $\mathbf{p}$ на эти оси. Тогда из (5.14) следует, что

аналогичные проекции правой части уравнения (5.9) суть

$$\frac{2\gamma}{r^3} \lambda, \quad -\frac{\gamma}{r^3} \mu, \quad -\frac{\gamma}{r^3} \nu, \quad (5.15)$$

$\dot{\mathbf{r}}$ есть полная производная вектора $\mathbf{r}$ по времени в невращающейся системе координат. Пусть $\dot{\mathbf{p}}$ — полная производная в системе координат, вращающейся с угловой скоростью $\mathbf{\Omega}$ относительно неподвижной системы отсчета, причем в некоторый момент времени оси обеих систем совпадают. Тогда связь между обеими производными хорошо известна (см., например, Лоуден, стр. 240, и [8*, стр. 79]):

$$\dot{\mathbf{p}} = \dot{\mathbf{p}} + \mathbf{\Omega} \times \mathbf{p}. \quad (5.16)$$

Заменяя вектор $\mathbf{p}$ в этой формуле его производной $\dot{\mathbf{p}}$, получаем

$$\ddot{\mathbf{p}} = \ddot{\mathbf{p}} + \dot{\mathbf{\Omega}} \times \mathbf{p} + 2\mathbf{\Omega} \times \dot{\mathbf{p}} + \mathbf{\Omega} \cdot \mathbf{p} \mathbf{\Omega} - \mathbf{\Omega}^2 \mathbf{p}. \quad (5.17)$$

Пусть подвижная система координат $OXYZ$ в произвольный момент времени вращается с угловой скоростью

$$\mathbf{\Omega} = \dot{\theta} \mathbf{k}, \quad (5.18)$$

где $\mathbf{k}$ — единичный вектор оси Oz . Подставляя значение $\mathbf{\Omega}$ в (5.16), (5.17), получаем соотношения, определяющие $\dot{\mathbf{p}}$, $\ddot{\mathbf{p}}$ в зависимости от локальных производных (взятых в системе отсчета $OXYZ$):

$$\dot{\mathbf{p}} = \dot{\mathbf{p}} + \dot{\theta} \mathbf{k} \times \mathbf{p}, \quad (5.19)$$

$$\ddot{\mathbf{p}} = \ddot{\mathbf{p}} + \ddot{\theta} \mathbf{k} \times \mathbf{p} + 2\dot{\theta} \mathbf{k} \times \dot{\mathbf{p}} + \dot{\theta}^2 (\mathbf{k} \cdot \mathbf{p} \mathbf{k} - \mathbf{p}). \quad (5.20)$$

Полагая в соотношении (5.20)

$$\mathbf{p} = r \mathbf{q}, \quad (5.21)$$

приходим к равенству

$$\begin{aligned} \ddot{\mathbf{p}} = & r \ddot{\mathbf{q}} + 2\dot{r} \dot{\mathbf{q}} + (\ddot{r} - r \dot{\theta}^2) \mathbf{q} + (r \ddot{\theta} + 2\dot{r} \dot{\theta}) \mathbf{k} \times \mathbf{q} + \\ & + 2r \dot{\theta} \mathbf{k} \times \dot{\mathbf{q}} + r \dot{\theta}^2 \mathbf{k} \cdot \mathbf{q} \mathbf{k}, \end{aligned} \quad (5.22)$$

которое при помощи уравнений движения (5.1), (5.2) сводится к виду

$$\ddot{\mathbf{p}} = r\ddot{\mathbf{q}} + 2\dot{r}\dot{\mathbf{q}} + 2r\dot{\theta}\mathbf{k} \times \dot{\mathbf{q}} + r\dot{\theta}^2\mathbf{k} \cdot \mathbf{q}\mathbf{k} - \frac{\gamma}{r^2}\mathbf{q}. \quad (5.23)$$

Обозначив дифференцирование по θ в системе $OXYZ$ штрихом, запишем

$$\dot{\mathbf{q}} = \dot{\theta}\mathbf{q}', \quad (5.24)$$

$$\ddot{\mathbf{q}} = \dot{\theta}^2\mathbf{q}'' + \ddot{\theta}\mathbf{q}'. \quad (5.25)$$

Подставляя эти соотношения в (5.23), преобразуем его при помощи уравнений (5.2) и (5.4) к окончательной форме

$$\ddot{\mathbf{p}} = \frac{\gamma l}{r^3} \left(\mathbf{q}'' + 2\mathbf{k} \times \mathbf{q}' + \mathbf{k} \cdot \mathbf{q}\mathbf{k} - \frac{r}{l}\mathbf{q} \right). \quad (5.26)$$

Таким образом, если $\mathbf{q}$ имеет проекции u , v , w на оси OX , OY , Oz соответственно, то из последнего уравнения следует, что левая часть соотношения (5.9) дает на те же оси проекции

$$\frac{\gamma l}{r^3} \left(u'' - 2v' - \frac{r}{l}u, \quad v'' + 2u' - \frac{r}{l}v, \quad w'' + w - \frac{r}{l}w \right). \quad (5.27)$$

На основании (5.21) имеем

$$\lambda = ru, \quad \mu = rv, \quad \nu = rw. \quad (5.28)$$

Поэтому три компоненты (5.15) правой части уравнения (5.9) можно переписать следующим образом:

$$\frac{2\gamma}{r^2}u, \quad -\frac{\gamma}{r^2}v, \quad -\frac{\gamma}{r^2}w. \quad (5.29)$$

Приравнявая их соответствующим составляющим (5.27), получаем уравнения

$$u'' - 2v' = \frac{3r}{l}u, \quad (5.30)$$

$$v'' + 2u' = 0, \quad (5.31)$$

$$w'' + w = 0, \quad (5.32)$$

которые определяют вектор $\mathbf{q}$, а следовательно, и базис $\mathbf{p}$ на кеплеровой дуге.

Так как рассматриваемое поле стационарно, существует, как известно, первый интеграл уравнений (5.30) — (5.32), даваемый зависимостью (3.40). Подставляя (5.21) в (5.19), получаем

$$\dot{\mathbf{p}} = r\dot{\mathbf{q}} + \dot{r}\mathbf{q} + r\dot{\theta}\mathbf{k} \times \mathbf{q}, \quad (5.33)$$

что в силу (5.24) эквивалентно соотношению

$$\dot{\mathbf{p}} = r\dot{\theta}(\mathbf{q}' + \mathbf{k} \times \mathbf{q}) + \dot{r}\mathbf{q}, \quad (5.34)$$

означающему, что проекции производной $\dot{\mathbf{p}}$ на оси системы $OXYZ$ равны

$$\dot{p} = [r\dot{\theta}(u' - v) + \dot{r}u, \quad r\dot{\theta}(v' + u) + \dot{r}v, \quad r\dot{\theta}w' + \dot{r}w]. \quad (5.35)$$

Аналогично

$$\mathbf{p} = (ru, rv, rw), \quad (5.36)$$

$$\mathbf{g} = \left(-\frac{v}{r^2}, 0, 0\right), \quad (5.37)$$

$$\mathbf{v} = (\dot{r}, r\dot{\theta}, 0). \quad (5.38)$$

Теперь (3.40) немедленно дает

$$rr\dot{\theta}u' + r^2\dot{\theta}^2v' + \left(\dot{r}^2 + r^2\dot{\theta}^2 + \frac{v}{r}\right)u = \text{const}, \quad (5.39)$$

причем значение постоянной равно нулю для случая, когда время перелета не фиксировано заранее. С учетом (5.3) — (5.5) можно записать этот первый интеграл в виде

$$u'e \sin f(1 + e \cos f) + v'(1 + e \cos f)^2 + u(2 + e^2 + 3e \cos f) = C, \quad (5.40)$$

где C — постоянная и

$$f = \theta - \tilde{\omega} \quad (5.41)$$

— истинная аномалия.

В случае $e=0$ кеплерова дуга есть круг радиуса l , и уравнения (5.30) — (5.32) тогда принимают вид

$$u'' - 2v' = 3u, \quad (5.42)$$

$$v'' + 2u' = 0, \quad (5.43)$$

$$w'' + w = 0. \quad (5.44)$$

Разрешая их и подставляя результат в (5.28), получаем

$$\lambda = A \cos f + B \sin f + 2C, \quad (5.45)$$

$$\mu = 2B \cos f - 2A \sin f - 3Cf + D, \quad (5.46)$$

$$v = E \cos f + F \sin f, \quad (5.47)$$

где A, B, C, D, E, F — константы интегрирования. В этом случае первый интеграл (5.40), очевидно, идентичен интегралу уравнения (5.43).

Если эксцентриситет отличен от нуля, целесообразно заменить уравнение (5.30) первым интегралом (5.40). Интегрируя (5.31), находим

$$v' = Ae - 2u, \quad (5.48)$$

где A — произвольная постоянная. Далее исключаем v' из первого интеграла; это дает

$$u' \sin f (1 + e \cos f) + u(e - \cos f - 2e \cos^2 f) = C - A(1 + e \cos f)^2. \quad (5.49)$$

Умножая это уравнение на интегрирующий множитель $(1 + e \cos f)^{-2} \sin^2 f$ и интегрируя полученное уравнение, получаем

$$u = (1 + e \cos f)(A \cos f + B e \sin f + C I_1), \quad (5.50)$$

где

$$I_1 = \sin f \int \frac{df}{\sin^2 f (1 + e \cos f)^2} \quad (5.51)$$

и B — произвольная постоянная. Последний интеграл можно выразить через известные функции, соответствующий результат принадлежит Лоудену [1]. Однако в настоящей монографии рассматриваются главным образом проблемы отыскания оптимальных траекторий для маневров с нефиксированным временем. В таких задачах $C=0$ и окончательный результат не зависит от I_1 . Подставляя u из (5.50) в (5.48) и выполняя интегрирование, получаем

$$v = (1 + e \cos f)(-A \sin f + B(1 + e \cos f) + \frac{D - A \sin f}{1 + e \cos f} + C I_2), \quad (5.52)$$

где

$$I_2 = \frac{\operatorname{ctg} f}{e(1 + e \cos f)} + \frac{1 + e \cos f}{e \sin f} I_1 \quad (5.53)$$

и D — произвольная постоянная.

Уравнение (5.44) для w интегрируется без труда; в результате имеем

$$w = E \cos f + F \sin f, \quad (5.54)$$

где E и F — постоянные интегрирования.

Из полученного следует

$$\lambda = A \cos f + B e \sin f + C I_2, \quad (5.55)$$

$$\mu = -A \sin f + B(1 + e \cos f) + \frac{D - A \sin f}{1 + e \cos f} + C I_2, \quad (5.56)$$

$$v = (1 + e \cos f)^{-1} (E \cos f + F \sin f), \quad (5.57)$$

причем параметр l входит в константы A , B , C , D , E и F .

Из соотношения (5.19) имеем

$$\dot{\mathbf{p}} = (\mathbf{p}' + \mathbf{k} \times \mathbf{p}) \dot{\theta}. \quad (5.58)$$

Таким образом, если проекции вектора $\mathbf{p}$ на оси $OXYZ$ суть ξ , η , ζ , то

$$\xi = (\lambda' - \mu) \dot{\theta}, \quad \eta = (\mu' + \lambda) \dot{\theta}, \quad \zeta = v' \dot{\theta}. \quad (5.59)$$

Подстановка в эти уравнения значения $\dot{\theta}$ из (5.4) и выражений для λ , μ , v из (5.45) — (5.47) либо из (5.55) — (5.57) дает возможность определить компоненты производной базиса в явной форме. При $e=0$ они имеют вид

$$\xi = \frac{\gamma^{1/2}}{a^{3/2}} (A \sin f - B \cos f + 3Cf - D), \quad (5.60)$$

$$\eta = -\frac{\gamma^{1/2}}{a^{3/2}} (A \cos f + B \sin f + C), \quad (5.61)$$

$$\zeta = -\frac{\gamma^{1/2}}{a^{3/2}} (F \cos f - E \sin f), \quad (5.62)$$

где a — радиус орбиты. При $e \neq 0$ эти формулы имеют вид

$$\xi = \frac{V\sqrt{l}}{r^2} \left(\frac{A \sin f - D}{1 + e \cos f} - B + C I_3 \right), \quad (5.63)$$

$$\eta = \frac{\gamma^{1/2}}{l^{3/2}} [-A(e + \cos f) + D e \sin f + C \cos f], \quad (5.64)$$

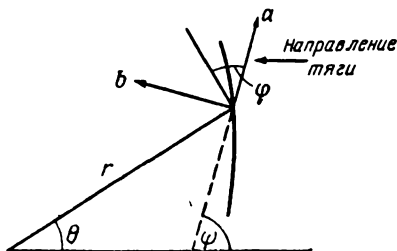
$$\zeta = \frac{\gamma^{1/2}}{l^{3/2}} [(e + \cos f) F - E \sin f], \quad (5.65)$$

где

$$I_3 = \frac{e \sin f - \cos f}{e \sin f (1 + e \cos f)^2} - \frac{I_1}{e} \operatorname{cosec} f. \quad (5.66)$$

5.2. Участки промежуточной тяги

Форма базиса для общего вида участка промежуточной тяги в гравитационном поле с притяжением, обратно пропорциональным квадрату расстояния от (единственного) центра тяготения, была неизвестна



Р и с. 5.2.

до 1962 г. Однако в 1961—1962 гг. проблема была решена (Лоуден [3, 4]) для частного случая, когда рассматриваемый участок лежит в плоскости, проведенной через центр тяготения. В данном разделе рассматривается метод отыскания такого решения.

Допустим, что в момент t ракета R представляет собой точку с полярными координатами (r, θ) , движущуюся по дуге переменной тяги, причем в тот же момент вектор тяги двигателя составляет угол φ с трансверсалью по направлению движения (рис. 5.2). Пусть

ψ — угол, образуемый вектором тяги с начальной полярной осью ($\theta=0$), тогда

$$\psi = \frac{\pi}{2} - \varphi + \theta. \quad (5.67)$$

Выпишем уравнения движения в проекциях на направление вектора тяги и перпендикуляра к нему.

Пусть $\mathbf{a}$, $\mathbf{b}$ — орты вектора тяги и перпендикуляра к нему, направленные в соответствии с рис. 5.2. В момент t указанные векторы вращаются с угловой скоростью $\dot{\psi}$, откуда следует

$$\dot{\mathbf{a}} = \dot{\psi} \mathbf{b}, \quad \dot{\mathbf{b}} = -\dot{\psi} \mathbf{a}. \quad (5.68)$$

Пусть u , w — проекции скорости ракеты на рассматриваемые оси. Тогда имеется соотношение

$$\mathbf{v} = u\mathbf{a} + w\mathbf{b}, \quad (5.69)$$

путем дифференцирования которого с учетом (5.68) можно получить

$$\dot{\mathbf{v}} = (\dot{u} - w\dot{\psi})\mathbf{a} + (\dot{w} + u\dot{\psi})\mathbf{b}. \quad (5.70)$$

Выписывая уравнение движения ракеты (2.1) в проекциях на оси с ортами $\mathbf{a}$ и $\mathbf{b}$, приходим к результату

$$\dot{u} - w\dot{\psi} = f - \frac{v}{r^2} \sin \varphi, \quad (5.71)$$

$$\dot{w} + u\dot{\psi} = \frac{v}{r^2} \cos \varphi, \quad (5.72)$$

где

$$f = \frac{cm}{M} \quad (5.73)$$

— реактивное ускорение.

Обратим внимание на уравнение (3.36), описывающее базис. Известно, что на участке переменной тяги базис коллинеарен вектору тяги и имеет постоянную величину. Поэтому можно записать

$$\mathbf{p} = p\mathbf{a}, \quad (5.74)$$

где p — константа. Дважды дифференцируя последнее соотношение по t и используя (5.68), получаем

$$\ddot{\mathbf{r}} = p(-\dot{\psi}^2 \mathbf{a} + \ddot{\psi} \mathbf{b}). \quad (5.75)$$

Проекции левой части уравнения (3.36) на оси $\mathbf{a}$ и $\mathbf{b}$ равны $-p\dot{\psi}^2$, $p\ddot{\psi}$ соответственно. Обращаясь к формулам (5.15) предыдущего раздела, замечаем, что правая часть уравнения (3.36) в радиальном и трансверсальном направлениях соответственно имеет составляющие

$$\frac{2\gamma}{r^3} p \sin \varphi, \quad -\frac{\gamma}{r^3} p \cos \varphi. \quad (5.76)$$

Проектируя далее эти компоненты на оси $\mathbf{a}$ и $\mathbf{b}$, записываем соответственно

$$\frac{\gamma p}{r^3} (3 \sin^2 \varphi - 1), \quad -\frac{3\gamma p}{r^3} \sin \varphi \cos \varphi. \quad (5.77)$$

Итак, уравнение (3.36) в проекциях на указанные оси имеет следующий вид:

$$\dot{\psi}^2 = \frac{\gamma}{r^3} (1 - 3 \sin^2 \varphi), \quad (5.78)$$

$$\ddot{\psi} = -\frac{3\gamma}{r^3} \sin \varphi \cos \varphi. \quad (5.79)$$

Радиальная и трансверсальная компоненты $\mathbf{v}$ равны $\dot{r}$ и $r\dot{\theta}$ соответственно. Проектируя их также на оси $\mathbf{a}$ и $\mathbf{b}$, получаем

$$u = \dot{r} \sin \varphi + r\dot{\theta} \cos \varphi, \quad (5.80)$$

$$w = -\dot{r} \cos \varphi + r\dot{\theta} \sin \varphi. \quad (5.81)$$

Семь уравнений (5.67), (5.71), (5.72), (5.78) — (5.81) позволяют найти семь неизвестных функций времени t : r , θ , u , w , φ , ψ , f и, таким образом, полностью определить участок промежуточной тяги.

Так как поле стационарно, можно сразу записать первый интеграл выписанных уравнений в форме (3.40). В проекциях на $\mathbf{a}$ и $\mathbf{b}$ мы имеем

$$\left. \begin{aligned} \mathbf{p} &= (p, 0), & \mathbf{g} &= \left(-\frac{\gamma}{r^2} \sin \varphi, \frac{\gamma}{r^2} \cos \varphi \right), \\ \dot{\mathbf{p}} &= (0, p\dot{\psi}), & \mathbf{v} &= (u, w). \end{aligned} \right\} \quad (5.82)$$

Подстановка в (3.40) теперь дает

$$\omega\dot{\psi} = C - \frac{\gamma}{r^2} \sin \varphi. \quad (5.83)$$

Еще один первый интеграл можно вывести следующим образом: из (5.78) и (5.79) получим сначала уравнение

$$\dot{\psi}^2 \cos \varphi - \ddot{\psi} \sin \varphi = \frac{\gamma}{r^3} \cos \varphi \quad (5.84)$$

и затем из (5.72) — соотношение

$$\dot{\omega} + u\dot{\psi} - r\dot{\psi}^2 \cos \varphi + r\ddot{\psi} \sin \varphi = 0, \quad (5.85)$$

эквивалентное выражению

$$\frac{d}{dt} (\omega + r\dot{\psi} \sin \varphi) = 0, \quad (5.86)$$

как это следует из (5.67) и (5.80). В результате интегрирования приходим к первому интегралу в форме

$$\omega + r\dot{\psi} \sin \varphi = A, \quad (5.87)$$

где A — постоянная интегрирования.

Исключая $\dot{\psi}$ из (5.83), (5.87), а затем также из (5.78), (5.83), получаем

$$\omega (A - \omega) = \left(Cr - \frac{\gamma}{r} \sin \varphi \right) \sin \varphi, \quad (5.88)$$

$$\omega^2 (1 - 3 \sin^2 \varphi) = \frac{r}{\gamma} \left(Cr - \frac{\gamma}{r} \sin \varphi \right)^2. \quad (5.89)$$

Таким образом, ω и r также определяются как функции φ без дальнейшего интегрирования. Поэтому впредь в этом разделе удобно рассматривать φ в качестве независимой переменной; штрихом будем обозначать дифференцирование по этой переменной. Из (5.67) и (5.81) следует

$$\omega = -\frac{d}{dt} (r \cos \varphi) + r\dot{\psi} \sin \varphi. \quad (5.90)$$

Отсюда с учетом (5.87) находим результат

$$A - 2\omega = \frac{d}{dt} (r \cos \varphi), \quad (5.91)$$

который перепишем следующим образом:

$$(A - 2w)t' = \frac{d}{d\varphi}(r \cos \varphi). \quad (5.92)$$

Интегрируя последнее уравнение, можно найти t в зависимости от φ .

Аналогичным способом из (5.87) получаем уравнение

$$\psi' = \frac{t'(A - w)}{r \sin \varphi}, \quad (5.93)$$

интегрирование которого позволяет найти ψ как функцию φ , после чего (5.67) немедленно превращается в выражение для определения θ через тот же параметр.

Окончательно можно найти f и u в зависимости от φ при помощи уравнений (5.71) и (5.80) соответственно.

Хотя схематически приведенный выше ход выкладок принципиально можно довести до конца, возникающие на этом пути практические затруднения в общем случае кажутся непреодолимыми, вследствие чего мы в этой книге больше не будем заниматься указанным вопросом. Однако в таком практически важном случае, когда время перелета не фиксировано заранее, S обращается в нуль и все выкладки сильно упрощаются. Так, для указанного случая из (5.88), (5.89) находим

$$r = \frac{as^6}{1 - 3s^2}, \quad (5.94)$$

$$w = \pm \left(\frac{\gamma}{a}\right)^{1/2} \frac{1}{s^2}, \quad (5.95)$$

где $a = 9\gamma/A^2$, $s = \sin \varphi$, а неопределенность в знаке будет разрешена позднее. Очевидно, a — величина положительная, имеющая физическую размерность длины.

Из (5.92) далее следует

$$t' = \pm \frac{a^{3/2}}{\gamma^{1/2}} \frac{s^7(5s^2 - 3)}{(1 - 3s^2)^2}, \quad (5.96)$$

причем знак определяется согласно знаку (5.95). Интегрируя это уравнение, получаем

$$\pm \frac{\gamma^{1/2}}{a^{3/2}} t = -\frac{1}{9} c^5 + \frac{31}{81} c^3 - \frac{5}{9} c - \\ - \frac{2}{81} \sqrt{\frac{2}{3}} \ln \frac{\sqrt{3}c - \sqrt{2}}{\sqrt{3}c + \sqrt{2}} - \frac{1}{81} \frac{c}{3c^2 - 2} + \text{const}, \quad (5.97)$$

где $c = \cos \varphi$.

Соотношение (5.93) дает

$$\psi' = 3s^{-2} - 5, \quad (5.98)$$

причем без неопределенности в знаке, откуда

$$\psi = \text{const} - 5\varphi - 3 \operatorname{ctg} \varphi. \quad (5.99)$$

Из (5.67) получаем

$$\theta = \theta_0 - 4\varphi - 3 \operatorname{ctg} \varphi, \quad (5.100)$$

где θ_0 — постоянная.

Уравнения (5.94), (5.100) образуют параметрические уравнения участка ПТ в полярных осях. При изменении φ от 0 до $\alpha = \arcsin(1/\sqrt{3})$ (α — положительный острый угол) θ изменяется от $-\infty$ до $(\theta_0 - 4\alpha - 3/2)$, а r — от 0 до ∞ , причем весь процесс протекает монотонно. Соответствующая ветвь участка ПТ является спиралью, раскручивающейся из полюса O в направлении против часовой стрелки и уходящей на бесконечно большое расстояние после бесконечного числа оборотов вокруг полюса. Если заменить φ на $\varphi - \pi$, выражение для r не изменится, а в формуле для θ появится только один дополнительный постоянный член. Это означает, что когда φ принимает значения из третьего квадранта, соответствующая дуга отличается от уже описанной только своей ориентацией. Если вместо φ подставить $-\varphi$ или $\pi - \varphi$, выражение для r вновь не изменится, однако формула для θ будет теперь иметь вид

$$\theta = \theta_0 + 4\varphi + 3 \operatorname{ctg} \varphi, \quad (5.101)$$

где любой новый постоянный член учитывается значением θ_0 . Это означает, что при значениях φ из

второго и четвертого квадрантов результирующая кривая представляет собой зеркальное отображение описанной выше спирали, иначе говоря спирали, раскручивающейся по часовой стрелке. Значения φ , лежащие в пределах $(\alpha, \pi - \alpha)$ или $(\alpha - \pi, -\alpha)$, недопустимы, так как им соответствуют отрицательные значения r , в то время как r рассматривается всюду как существенно положительная величина. Итак, мы подвергли рассмотрению весь мыслимый диапазон значений φ . Исходя из сказанного, ограничим область изменения φ диапазонами $(0, \alpha)$ и $(\pi - \alpha, \pi)$. Это ограничение не приводит к какой-либо потере общности, так как путем изменения знака реактивного ускорения f всегда можно перевести значение φ из третьего и четвертого квадрантов в первый и второй соответственно. Позднее будет показано, что указанное ограничение в действительности приводит только к положительным значениям f .

Так как по предположению θ возрастает с течением времени t , спираль, соответствующая значениям φ из первого квадранта, представляет собой траекторию ракеты, которая исходит из центра тяготения. По спирали, соответствующей значениям φ из второго квадранта, ракета приближается к центру тяготения. Все спирали промежуточной тяги идентичны во всем, за исключением ориентации (определяемой θ_0), масштаба (определяемого значением a) и направления движения вокруг полюса (определяемого диапазоном значений φ).

Отметим еще, как можно разрешить неопределенность в знаке. Дифференцируя (5.100), получаем

$$\theta' = 3s^{-2} - 4 \geq 5, \quad (5.102)$$

так как $s^2 \leq 1/3$. Отсюда

$$t' = \frac{\theta'}{\dot{\theta}} > 0, \quad (5.103)$$

так как по предположению $\dot{\theta}$ всюду больше нуля. Неравенство (5.103) совместно с уравнением (5.96) только при условии, что знак плюс имеет место при отрицательных значениях s (т. е. когда угол φ заклю-

чен во втором квадранте), а знак минус — при положительных s (т. е. когда угол φ лежит в первом квадранте). Отсюда заключаем, что отрицательный знак в уравнениях (5.95) — (5.97) фигурирует при удалении ракеты от полюса, а положительный — в случае, когда ракета приближается к полюсу.

Теперь можно найти u при помощи (5.80):

$$u = \pm \left(\frac{\gamma}{a} \right)^{1/2} \frac{3 - 7s^2}{s^3(5s^2 - 3)} \cos \varphi, \quad (5.104)$$

причем знак выбирается согласно установленному правилу. На основании (5.71) вытекает следующее выражение для f :

$$f = \frac{\gamma}{a^2} \left(\frac{1 - 3s^2}{3 - 5s^2} \right)^3 s^{-11} (27 - 75s^2 + 60s^4). \quad (5.105)$$

Здесь неопределенность в знаке отсутствует и, как отмечалось выше, f больше нуля для всех рассматриваемых значений φ . Уравнение (5.73) показывает, что характеристическую скорость на любом участке спирали можно вычислить по формуле

$$V = \int f dt = \pm \left| \left(\frac{\gamma}{a} \right)^{1/2} \frac{3(1 - 2s^2)(1 - 5s^2)}{s^3(3 - 5s^2)} \cos \varphi \right|, \quad (5.106)$$

взятой с учетом соответствующих пределов.

Полная энергия на единицу массы E аппарата в любой момент дается выражением

$$\begin{aligned} E &= \frac{1}{2} (u^2 + w^2) - \frac{\gamma}{r} = \\ &= -\frac{\gamma}{a} \frac{9 - 72s^2 + 169s^4 - 126s^6}{2s^6(3 - 5s^2)^2}. \end{aligned} \quad (5.107)$$

При удалении ракеты от центра тяготения и увеличении s от 0 до $1/\sqrt{3}$ энергия E возрастает в отрицательном диапазоне до нуля и, наконец, становится положительной на конечном участке спирали. Это означает, что ракета в конце концов уходит от центра тяготения.

В заключение приведем соотношения для радиальной и трансверсальной компонент скорости аппарата:

$$v_r = \dot{r} = \pm \left(\frac{\gamma}{a} \right)^{1/2} \frac{6(1-2s^2)}{s^2(5s^2-3)} \cos \varphi, \quad (5.108)$$

$$v_\theta = r\dot{\theta} = \pm \left(\frac{\gamma}{a} \right)^{1/2} \frac{(3-4s^2)(1-3s^2)}{s^3(5s^2-3)}. \quad (5.109)$$

Отсюда угол χ между направлением движения и перпендикуляром к радиус-вектору определяется следующим образом:

$$\operatorname{tg} \chi = \frac{v_r}{v_\theta} = \frac{6s(1-2s^2)}{(3-4s^2)(1-3s^2)} \cos \varphi. \quad (5.110)$$

На тех участках спирали, где угол φ мал, имеется приближенная зависимость

$$\operatorname{tg} \chi = 2s = 2 \sin \varphi,$$

или

$$\chi = 2\varphi, \quad (5.111)$$

т. е. вектор тяги направлен по биссектрисе угла между перпендикуляром к радиус-вектору и направлением движения. Этот вывод соответствует результату, полученному Лоуденом [2] для задачи об оптимальном уходе от центра тяготения при помощи тяги заданной малой величины.

5.3. Участки максимальной тяги

Имея в виду аналитическую сложность описания участков МТ в однородном гравитационном поле (см. разд. 4.1), следует ожидать, что решение для соответствующих дуг в поле с тяготением, обратно пропорциональным квадрату расстояния от центра, будет представлять значительные трудности. Действительно, это решение нельзя выразить при помощи известных функций. К моменту выхода настоящей монографии (1962 г.) такое решение не было найдено. Однако, если допустима аппроксимация этих участков точками соединения, то можно привлечь изложенную в разд. 3.2 теорию, в результате чего отсутствие решения для дуг МТ не будет более служить помехой для расчета

оптимальных маневров в окрестности центра тяготения. Этот случай часто встречается на практике, однако даже тогда, когда указанное приближение не оправдано, особенности истинного маневра удастся установить при помощи приближенного решения. Так как точные характеристики оптимального маневра, вообще говоря, не являются критическими, удовлетворительную программу регулирования величины тяги можно разработать сравнительно простыми средствами. Такого рода приближением мы будем заниматься в следующей главе.

ЛИТЕРАТУРА

1. Lawden D. F., Fundamentals of space navigation, *J. Brit. Interplanet. Soc.*, 13, № 2, 87—101 (1954).
2. Lawden D. F., Optimal escape from a circular orbit, *Astronaut. Acta*, 4, № 3, 218—233 (1958).
3. Lawden D. F., Optimal powered arcs in an inverse square law field, *J. Amer. Rocket Soc.*, 31, № 4, 566—568 (1961).
4. Lawden D. F., Optimal intermediate-thrust arcs in a gravitational field, *Astronaut. Acta*, 8, № 2, 106—123 (1962).
5. Weatherburn C. E., *Advances vector analysis*, London, Bell, 1928, p. 7.
- 6*. Дубошин Г. Н., *Небесная механика. Основные задачи и методы*, Физматгиз, М., 1963.
- 7*. Кочин Н. Е., *Векторное исчисление и начала тензорного исчисления*, Изд. АН СССР, М., 1961.
- 8*. Лурье А. И., *Аналитическая механика*, Физматгиз, М., 1961.

Упражнения

1. Оптимальная траектория заключена в плоскости, проведенной через центр ньютонова поля тяготения, P — точка, где участок ПТ сменяется кеплеровой траекторией, причем в точке P импульсная тяга не прикладывается. Введем обозначение $q = r^2$. Используя результаты упражнения 2 (гл. 3), показать, что в точке P выполняется соотношение

$$\frac{d^4 q}{dt^4} = - \frac{3\gamma f}{r^4} s (3 - 5s^2)$$

и что r принимает в P максимальное значение. (Указание: используя результат упражнения 2, направить ось Ox_1 по OP .)

2. Показать, что в любой точке на спирали ПТ круговая орбитальная скорость $v_{кр}$ определяется соотношением

$$v_{кр} = \sqrt{\frac{\gamma}{a} \frac{(1 - 3s^2)^{1/2}}{s^3}},$$

в силу чего уравнения (5.108), (5.109) можно записать в виде

$$v_r = \frac{6s(1-2s^2)\cos\varphi}{(1-3s^2)^{1/2}(3-5s^2)} v_{кр},$$

$$v_\theta = \frac{(3-4s^2)(1-3s^2)^{1/2}}{3-5s^2} v_{кр}.$$

Показать, что на участках спирали, где φ мал, скорость ракеты приблизительно равна $v_{кр}$.

3. Показать, что характеристическая скорость перелета вдоль отрезка спирали ПТ от $s=s_1$ до $s=s_2$, где $s_1 < s_2$ и s_2 мало, дается приближенной зависимостью

$$V = \sqrt{\frac{\gamma}{a} \left(\frac{1}{s_1^3} - \frac{1}{s_2^3} \right)}.$$

Вычислить с той же степенью точности характеристическую скорость для гомановского перелета (см. рис. 6.4) между двумя орбитами и убедиться, что она меньше V .

6. МЕЖОРБИТАЛЬНЫЕ ПЕРЕЛЕТЫ

6.1. Введение

В настоящей главе ранее установленные результаты используются для решения целого ряда задач, связанных с оптимальным перелетом ракеты между орбитами в поле с гравитационным притяжением, обратно пропорциональным квадрату расстояния от притягивающего центра. Для простоты будем далее предполагать, что движение происходит в плоскости, содержащей центр тяготения, и время перелета рассматривается как переменная, значение которой также подлежит оптимизации. Первое предположение означает, что во внимание принимаются компоненты базиса, лежащие только в плоскости движения. Второе означает, что входящую в формулы предыдущей главы константу C следует положить равной нулю. В качестве дополнительного упрощения примем, что все участки максимальной тяги аппроксимируются импульсами.

6.2. Базис на круговой орбите

На дуге НТ, соответствующей круговой орбите, из уравнений (5.45), (5.46) следует

$$\lambda = A \cos f + B \sin f = R \sin(f + f_0), \quad (6.1)$$

$$\mu = 2B \cos f - 2A \sin f + D = 2R \cos(f + f_0) + D, \quad (6.2)$$

где $R = \sqrt{A^2 + B^2}$, $\operatorname{tg} f_0 = A/B$. Надлежащим выбором полярной оси отсчета $f=0$ указанные уравнения приводятся к виду

$$\lambda = R \sin f, \quad \mu = 2R \cos f + D. \quad (6.3)$$

Следовательно, геометрическое место точек $P(\lambda, \mu)$ на плоскости λ, μ есть эллипс, малая ось которого параллельна оси λ и равна $2R$, большая ось параллельна оси μ и равна $4R$, а центр находится в точке $(0, D)$. Указанная p -траектория для круговой орбиты представлена на рис. 6.1, рассмотрение которой показывает, что на каждом обороте изображающей точки по годографу модуль базиса $p (=OP)$ может иметь

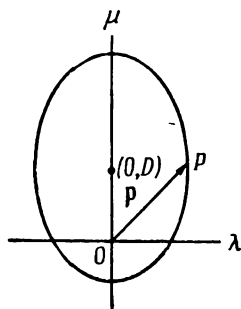


Рис. 6.1.

два максимума и два минимума либо только один максимум и один минимум в зависимости от величины D . Так, при $D=0$ полюс O совпадает с центром эллипса, p достигает максимума, когда P является одной из апсидальных точек, и минимума, когда P находится на одном из концов малой оси. Однако если полюс O совпадает с фокусом, то p принимает максимальное значение в одной апсиде и минимальное в другой, причем другие стационарные точки отсутствуют. Аналитически это следует из (6.3):

$$p^2 = \lambda^2 + \mu^2 = 3R^2 \cos^2 f + 4RD \cos f + R^2 + D^2, \quad (6.4)$$

т. е. p^2 принимает стационарные значения при $f=0$ и π , а также при условии

$$3R \cos f + 2D = 0. \quad (6.5)$$

Последнее уравнение имеет действительное решение только в случае $|D| \leq 3R/2$. Простой анализ показывает, что при $|D| < 3R/2$ величина p^2 (а следовательно, и p) имеет максимум, где $f=0$ или π , и минимум,

где $f = \pi + \arccos(2D/3R)$. Если $D \geq 3R/2$, величина p^2 достигает максимума при $f=0$ и минимума при $f=\pi$. Если $D \leq -3R/2$, p^2 имеет минимум при $f=0$ и максимум при $f=\pi$. В частном случае, когда $R=0$, p -траектория вырождается в точку, а величина p постоянна на всей круговой орбите.

Учитывая эти результаты совместно с условиями (а) — (г), приведенными на стр. 76, получаем, что если круговая орбита составляет часть оптимальной траектории, то двигатель включается в каждой или одной из точек $f=0$ и $f=\pi$ (за исключением $R=0$, когда две любые точки орбиты могут быть точками соединения). Однако во всех случаях в точке соединения $\lambda=0$, в силу чего тяга должна быть направлена по перпендикуляру к радиус-вектору. Поскольку ни в одной из точек спирали с промежуточной тягой вектор тяги не ориентирован подобным образом, то из условия (а) следует невозможность перехода круговой орбиты в спираль либо, наоборот, спирали — в круговую орбиту. Следовательно, допустимы касательные к круговой орбите импульсы тяги.

В любой точке соединения $p=P$, что соответствует абсолютному максимуму. Поэтому если на круговой орбите есть две точки соединения, то имеются две возможности: 1) либо $R=0$ и $D=\pm P$; 2) либо точки соединения лежат на противоположных концах диаметра, $f=0, \pi$ и $D=0, R=\pm P/2$. Таким образом,

$$\lambda=0, \quad \mu=\pm P,$$

или

$$\lambda=\pm \frac{1}{2} P \sin f, \quad \mu=\pm P \cos f. \quad (6.6)$$

В первом случае тяга в обеих точках соединения приложена по направлению движения либо в противоположную сторону в зависимости от выбора знака. Во втором случае тяга направлена по вектору скорости в одной точке и противоположно ему — в другой. В разд. 6.4 будет показано, что первый случай недопустим.

Однако, если круговая орбита является заключительным подынтервалом оптимальной траектории, она содержит только одну точку соединения, в которой p

принимает свое максимальное значение P , причем соединение должно иметь место в одной из точек $f=0$ и $f=\pi$. Это можно обеспечить, приняв

$$\lambda = \frac{1}{2}(P-D)\sin f, \quad \mu = (P-D)\cos f \pm D, \quad (6.7)$$

где $0 \leq D \leq P$. Тогда при выборе знака плюс соединение происходит при $f=0$, а при выборе знака минус — при $f=\pi$; тяга направлена по движению в первом случае и противоположно ему — во втором. Будет показано, что возможности соединения в двух точках (6.6) содержатся в формуле (6.7) при экстремальных значениях D (т. е. 0 и P).

Если на точку, движущуюся по круговой орбите, действует импульс тяги, приложенный по касательной к траектории (но необязательно в направлении движения), точка переходит на некоторую коническую орбиту. После приложения импульса мгновенное движение точки происходит под прямым углом к радиусу, проведенному из центра тяготения, т. е. пассивный участок траектории начинается из аперигея конической орбиты. Аналогично доказывается, что круговая орбита может возникнуть только после приложения импульса тяги в апериге конической орбиты.

6.3. Базис на конической орбите

Рассмотрим сначала случай, когда коническая орбита начинается в аперигеальной точке или входит в нее после приложения в апериге трансверсального импульса тяги. В этом случае предыдущий (или последующий) участок заведомо является кругом. Уравнение конического сечения в полярной системе координат имеет вид

$$\frac{l}{r} = 1 + e \cos f. \quad (6.8)$$

Уравнения (5.55), (5.56) показывают, что базис на орбите дается соотношениями

$$\lambda = A \cos f + B e \sin f, \quad (6.9)$$

$$\mu = -A \sin f + B(1 + e \cos f) + \frac{D - A \sin f}{1 + e \cos f}. \quad (6.10)$$

Одна из апсид $f=0$ или π должна быть точкой соединения, в которой тяга направлена по перпендикуляру

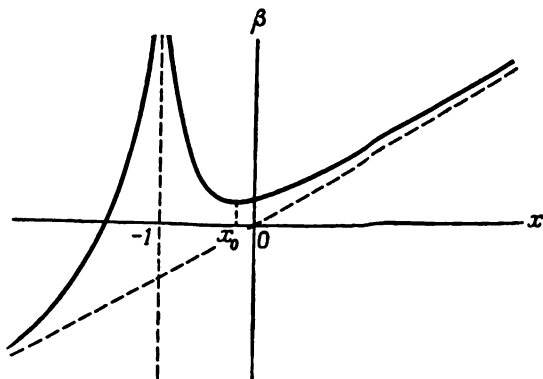


Рис. 6.2.

к радиус-вектору r . Допустим, что такой точкой служит $f=0$; тогда в ней $\lambda=0$ и $\mu \pm P$. Следовательно, необходимо выполнение условий

$$A=0, \quad (6.11)$$

$$B(1+e)^2 + D = \pm P(1+e), \quad (6.12)$$

откуда

$$\lambda = Be \sin f, \quad (6.13)$$

$$\mu = B(1+e \cos f) + \frac{D}{1+e \cos f} \quad (6.14)$$

и

$$p^2 = \lambda^2 + \mu^2 = B^2(1+e^2) + 2BD + 2B^2x + \frac{D^2}{(1+x)^2}, \quad (6.15)$$

где $x = e \cos f$. Вводя обозначение $\beta = p^2 - B^2 \times (1+e^2) - 2BD$, запишем

$$\frac{d\beta}{dx} = 2B^2 - \frac{2D^2}{(1+x)^3}, \quad \frac{d^2\beta}{dx^2} = \frac{6D^2}{(1+x)^4}. \quad (6.16)$$

Отсюда если D не равно нулю, то β имеет минимум при $x = x_0 = (D^2/B^2)^{1/3} - 1$, и соответствующий график приведен на рис. 6.2. Следует рассмотреть два случая.

В первом случае коническим сечением является эллипс с эксцентриситетом $e < 1$, x на орбите меняется в диапазоне $(-e, e)$. Тогда, если x_0 лежит внутри этого интервала, из рис. 6.2 очевидно, что p^2 (а значит, и p) принимает максимальные значения на линии апсид $f=0$, $f=\pi$ и минимальные — в двух точках, где $e \cos f = x_0$. Если x_0 лежит вне указанного интервала, максимум p^2 достигается в одной апсиде и минимум — в другой; других стационарных точек, помимо указанных, на орбите нет. Во втором случае коническое сечение является параболой или гиперболой ($e \geq 1$), x изменяется в диапазоне $(-1, e)$, никогда не достигая, однако, значения -1 . Затем, если x_0 принадлежит этому интервалу, максимум p^2 достигается при $f=0$ и минимум — в двух точках, где $e \cos f = x_0$. Если x_0 лежит вне указанного интервала, p^2 принимает минимальное значение в апсиде $f=0$ и другие стационарные точки отсутствуют. В каждом из этих двух случаев $p^2 \rightarrow \infty$ при $x \rightarrow -1$, и условие (в) (стр. 76) невыполнимо.

Если $D=0$, из уравнений (6.13), (6.14) следует, что p -траекторией является круг с центром в точке $(0, B)$ и радиусом $|B|e$; p имеет максимум при $f=0$ и минимум при $f=\pi$. Таким образом, во всех случаях не может быть больше одной точки соединения, причем импульс прикладывается в апсиде $f=0$. Этот случай $D=0$ единственно возможен, когда коническое сечение — парабола или гипербола. Здесь допустима только одна точка соединения — апсида, а сама дуга должна служить заключительным участком оптимальной траектории. Полагая в (6.12) — (6.14) $D=0$, получаем выражения для проекций базиса

$$\lambda = \pm \frac{Pe}{1+e} \sin f, \quad \mu = \pm \frac{P}{1+e} (1 + e \cos f). \quad (6.17)$$

Однако уравнения (5.3) — (5.5) показывают, что

$$v_r = e \sqrt{\frac{\gamma}{l}} \sin f, \quad v_\theta = r\dot{\theta} = \sqrt{\frac{\gamma}{l}} (1 + e \cos f), \quad (6.18)$$

где v_r , v_θ — радиальная и трансверсальная составляющие скорости v точки, движущейся по орбите. Сопо-

ставляя (6.17) и (6.18), можно записать

$$\mathbf{p} = \pm \frac{P}{1+e} \sqrt{\frac{1}{\gamma}} \mathbf{v}. \quad (6.19)$$

С точностью до численного множителя последний результат совпадает с решением для базиса в виде (3.59).

Возвратимся к эллиптическому случаю, когда D не равно нулю. Если x_0 не лежит в интервале $(-e, e)$, на орбите возможна только одна точка соединения, причем эллипс должен служить заключительным участком траектории. Тот же вывод всегда справедлив и в случае $D=0$. Если x_0 принадлежит указанному интервалу, обе апсиды могут являться точками соединения, но при этом необходимо также выполнение условия $p=P$ при $f=\pi$, которое приводит к уравнению

$$B(1-e)^2 + D = \pm P(1-e). \quad (6.20)$$

Если в (6.12), (6.20) одновременно принят знак плюс, так что в обеих апсидах импульсы ориентированы по направлению движения, то, разрешая эти уравнения относительно B и D , находим

$$B = \frac{1}{2} P, \quad D = \frac{1}{2} P(1-e^2). \quad (6.21)$$

Если в обоих уравнениях взят знак минус, что соответствует тормозному характеру обоих импульсов, знаки B и D меняются на обратный. Для двух указанных случаев $x_0 = (1-e^2)^{1/2} - 1$, и легко проверить, что x_0 лежит в интервале $(-e, e)$. Отсюда

$$\lambda = \pm \frac{1}{2} P e \sin f, \quad (6.22)$$

$$\mu = \pm \frac{1}{2} P \left(1 + e \cos f + \frac{1-e^2}{1+e \cos f} \right). \quad (6.23)$$

Если в уравнении (6.12) примем знак плюс, а в (6.20) — минус, так что импульс оказывается разгонным в перигеуме и тормозным в апоцентре, то в результате получим формулы

$$B = \frac{P}{2e}, \quad D = -\frac{P(1-e^2)}{2e}, \quad (6.24)$$

где, как и раньше, $x_0 = (1 - e^2)^{1/2} - 1$. Знаки B и D меняются, если в уравнении (6.12) взять отрицательный знак, а в уравнении (6.20) — положительный. Таким образом, имеем

$$\lambda = \pm \frac{1}{2} P \sin f, \quad (6.25)$$

$$\mu = \pm \frac{P}{2e} \left(1 + e \cos f - \frac{1 - e^2}{1 + e \cos f} \right). \quad (6.26)$$

Так как при $f = \pi$ всегда $\lambda = 0$, импульс во второй апсиде также направлен по касательной к орбите.

Отсюда очевидно, что ни предшествующий конической орбите участок, ни сменяющая ее дуга не могут являться участками промежуточной тяги, поскольку на последних направление тяги не может быть трансверсальным. Следовательно, оба окаймляющих участка также являются коническими сечениями, которые в своих апсидальных точках касаются рассматриваемой конической орбиты. Таким образом, для оптимальной траектории можно сделать следующий вывод: если один из составляющих траекторию пассивных участков представляет собой коническую орбиту, которая возникает (либо сменяется) при помощи импульса тяги, приложенного в апсидальной точке по касательной к орбите, то тогда и все остальные участки являются пассивными и точки соединения всегда совпадают с их апсидальными точками. В частности, вывод справедлив также и тогда, когда один из составляющих участков представляет собой круг.

В общем случае, когда компоненты базиса на конической орбите задаются соотношениями (5.55), (5.56) при $C = 0$, удобнее снова перейти к его проекциям на главную ось конического сечения и перпендикуляр к ней. Пусть λ_0 , μ_0 — компоненты вектора $\mathbf{p}$ по указанным направлениям соответственно. Тогда

$$\lambda_0 = \lambda \cos f - \mu \sin f = A - Q \sin f, \quad (6.27)$$

$$\mu_0 = \lambda \sin f + \mu \cos f = B e + Q \cos f, \quad (6.28)$$

где

$$Q = B + \frac{D - A \sin f}{1 + e \cos f}. \quad (6.29)$$

Обозначая через y расстояние точки конической орбиты от ее главной оси, получаем

$$y = r \sin f. \quad (6.30)$$

Рассматривая последнее соотношение совместно с (6.8), убедимся, что (6.29) эквивалентно зависимости

$$Q = B + \frac{D}{l} r - \frac{A}{l} y. \quad (6.31)$$

Уравнения (6.27), (6.28) показывают, что точка $P(\lambda_0, \mu_0)$ находится на расстоянии Q от точки (A, Be) в плоскости λ_0, μ_0 , как показано на рис. 6.3. Геометрическое место этих точек при изменении f можно найти

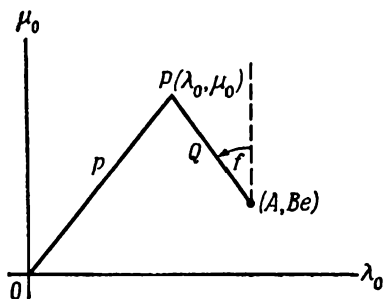


Рис. 6.3.

с помощью зависимости (6.31). Это и есть p -траектория. Точный вид этой кривой определяется значениями постоянных $B, D/l, A/l, e$, однако для частных случаев графики показывают, что p имеет либо два максимума и два минимума, либо только один максимум и один минимум, как было установлено для случая $A=0$.

6.4. Производная базиса

Производная $\dot{p}$ непрерывна в точке соединения. Прежде чем приступить к приложению полученных нами ранее результатов, целесообразно найти компоненты этой производной в точках соединения для всевозможных случаев, рассмотренных в двух последних разделах.

Так, с учетом уравнения (6.7) соотношения (5.60), (5.61) показывают, что компоненты базиса на круге радиусом a имеют вид

$$\left. \begin{aligned} \xi &= -\frac{\gamma^{1/2}}{a^{3/2}} \left[\frac{1}{2} (P - D) \cos f \pm D \right], \\ \eta &= -\frac{\gamma^{1/2}}{a^{3/2}} (P - D) \sin f. \end{aligned} \right\} \quad (6.32)$$

При наличии двух точек соединения тяга в одной направлена на разгон, а во второй — на торможение; это означает, что $D=0$, разгонный импульс дается при $f=0$, а тормозной — при $f=\pi$. При $f=0$ имеем

$$\xi = -\gamma^{1/2} \frac{P}{2a^{3/2}}, \quad \eta = 0, \quad (6.33)$$

в то время как при $f=\pi$

$$\xi = \gamma^{1/2} \frac{P}{2a^{3/2}}, \quad \eta = 0. \quad (6.34)$$

Если в обеих точках соединения направление тяги одинаково (по движению либо против него), то $D=P$ и соотношения

$$\xi = \mp \gamma^{1/2} \frac{P}{a^{3/2}}, \quad \eta = 0 \quad (6.35)$$

имеют место всюду на орбите, причем знак минус берется в случае разгона, а плюс — в противном случае.

Если на круге имеется только одна точка соединения, в которой тяга направлена по вектору скорости, в уравнении (6.32) следует принять знак плюс. В этом случае соединение производится в точке $f=0$, где

$$\xi = -\gamma^{1/2} \frac{P+D}{2a^{3/2}}, \quad \eta = 0. \quad (6.36)$$

В том случае, когда тяга направлена против движения, берется знак минус, точкой соединения служит точка $f=\pi$, в которой

$$\xi = \gamma^{1/2} \frac{P+D}{2a^{3/2}}, \quad \eta = 0. \quad (6.37)$$

Обращаясь к уравнениям (5.63), (5.64), получаем, что в случае приложения импульса тяги по касательной к орбите в апсиде $f=0$

$$\xi = -\frac{\gamma^{1/2}}{l^{3/2}}(1+e)[D+B(1+e)], \quad \eta=0. \quad (6.38)$$

Если апсида $f=\pi$ является точкой соединения, в которой тяга направлена по касательной к орбите, то в указанной точке

$$\xi = -\frac{\gamma^{1/2}}{l^{3/2}}(1-e)[D+B(1-e)], \quad \eta=0. \quad (6.39)$$

Если импульсы тяги прикладываются в обеих апсидах по направлению движения, то справедливы уравнения (6.22), (6.23) (со знаком плюс), из которых при $f=0$ следует

$$\xi = -\frac{P\gamma^{1/2}}{2l^{3/2}}(1+e)^2(2-e), \quad \eta=0, \quad (6.40)$$

а при $f=\pi$

$$\xi = -\frac{P\gamma^{1/2}}{2l^{3/2}}(1-e)^2(2+e), \quad \eta=0. \quad (6.41)$$

При перемене направления действия тяги в обеих точках соединения знак ξ в этих случаях меняется на обратный.

Если в точке $f=0$ тяга прикладывается по направлению движения, а в точке $f=\pi$ — против него, то имеют место уравнения (6.25), (6.26) (со знаком плюс). Итак, при $f=0$

$$\xi = -\frac{P\gamma^{1/2}}{2l^{3/2}}(1+e)^2, \quad \eta=0, \quad (6.42)$$

а при $f=\pi$

$$\xi = \frac{P\gamma^{1/2}}{2l^{3/2}}(1-e)^2, \quad \eta=0. \quad (6.43)$$

В двух последних формулах знак ξ меняется на обратный при перемене направления действия тяги (тормозной импульс при $f=0$ и разгонный при $f=\pi$).

Наконец, в случае, когда импульс прикладывается по касательной к гиперболической или параболической орбитам в апсидальной точке, справедливы соотношения (6.17). Добавляя к ним (6.38), получаем для указанной точки соединения зависимость

$$\xi = \mp \frac{v^{1/2}}{l^{3/2}} (1 + e) P, \quad \eta = 0, \quad (6.44)$$

где знак минус соответствует разгонному импульсу и знак плюс — тормозному.

С помощью полученных в настоящем разделе результатов можно доказать, что оптимальная траектория не может содержать круговую орбиту с двумя точками соединения, если в обеих точках импульсы носят одинаковый характер (т. е. направлены или на разгон, или на торможение).

Для определенности предположим, что оба импульса тяги направлены по вектору скорости, и рассмотрим первую точку соединения, в которой некоторая траектория переводится в круговую орбиту. Участок нулевой тяги, предшествующий кругу, должен быть эллипсом, касательным к кругу в своем апоцентре. Поскольку эта апсида является точкой соединения на эллипсе, то соответствующие компоненты вектора $\dot{\mathbf{r}}$ в ней даются соотношениями (6.39). С другой стороны, те же компоненты $\dot{\mathbf{r}}$ на круге определяются из уравнений (6.35) (со знаком минус). Из соображений непрерывности необходимо

$$P = \left(\frac{a}{l}\right)^{3/2} (1 - e) [D + B(1 - e)]. \quad (6.45)$$

Расстояние апоцентра эллипса от центра тяготения равно $l/(1 - e)$, откуда

$$a = \frac{l}{1 - e}. \quad (6.46)$$

Соотношение (6.45) теперь можно переписать следующим образом:

$$P(1 - e)^{1/2} = D + B(1 - e). \quad (6.47)$$

Для апсиды имеем далее $\lambda=0$ и $\mu=P$, откуда при помощи (6.14) получаем

$$P(1-e)=D+B(1-e)^2. \quad (6.48)$$

Разрешая (6.47), (6.48) относительно B и D , находим

$$\left. \begin{aligned} eB &= [(1-e)^{-1/2} - 1]P, \\ eD &= [1-e - (1-e)^{3/2}]P. \end{aligned} \right\} \quad (6.49)$$

Отсюда x_0 (стр. 116) определяется следующим образом:

$$x_0 = \left(\frac{D^2}{B^2} \right)^{1/3} - 1 = -e, \quad (6.50)$$

и для этого значения точка $f=\pi$ будет доставлять ρ минимальное значение. Следовательно, на эллипсе нарушается условие (в) (стр. 76), в силу чего рассматриваемая траектория не может быть оптимальной.

Аналогично доказывается, что случай, когда оба импульса прикладываются на круге в сторону торможения, также не является оптимальным.

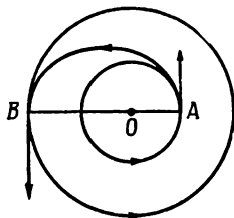
Таким образом, приходим к заключению: если пассивный участок, принадлежащий к оптимальной траектории, имеет форму круга и не является конечным участком траектории, то две лежащие на нем точки соединения расположены на противоположных концах диаметра и импульсы тяги в них прикладываются в разные стороны относительно направления движения. Следовательно, если круговая орбита является частью оптимальной траектории, то вне зависимости от того, является ли она конечным или внутренним подинтервалом траектории, все остальные пассивные участки должны иметь вид конических сечений с совпадающими осями.

6.5. Переход между двумя круговыми орбитами

Маневр перехода ракеты с минимумом затраты топлива с одной круговой орбиты вокруг центра тяготения на другую, концентрическую и компланарную первой, изучался Гоманом [3]. Так как обе орбиты — старта и назначения — суть круги, из результатов

предыдущих разделов настоящей главы следует, что орбитами перехода служат эллипсы с совпадающими главными осями, касательные друг к другу и к кругам в своих апсидах.

Рассмотрим сначала случай, когда имеется только одна переходная орбита — эллипс, касательный в апсидальных точках к двум круговым орбитам, как показано на рис. 6.4. Будем считать направление вращений ракеты по обоим кругам одинаковым и предположим, что переход совершается с малого круга на



Р и с. 6.4.

большой. Таков тип перехода, открытого Гоманом. Апсиды A и B эллипса служат точками соединения, импульсы в которых прикладываются по направлению движения.

Поскольку импульсы в точках A и B являются разгонными, соотношения (6.36) определяют компоненты вектора $\dot{\mathbf{r}}$ в этих точках кругов, а уравнения (6.40), (6.41) — аналогичные компоненты в тех же точках, принадлежащих эллипсу перехода. Полагая $P=1$ [см. (3.69)], запишем условие непрерывности $\dot{\mathbf{r}}$ в точке A :

$$D + 1 = \left(\frac{a}{l}\right)^{3/2} (1 + e)^2 (2 - e). \quad (6.51)$$

Из геометрических соображений (рис. 6.4) непосредственно видно, что

$$OA = a = \frac{l}{1 + e}, \quad (6.52)$$

откуда

$$D + 1 = (1 + e)^{1/2} (2 - e). \quad (6.53)$$

Условие непрерывности $\dot{p}$ в точке B устанавливается с помощью уравнений (6.36), (6.41) аналогичным образом:

$$D' + 1 = \left(\frac{b}{l}\right)^{3/2} (1 - e)^2 (2 + e) = (1 - e)^{1/2} (2 + e), \quad (6.54)$$

где D' — значение D для внешнего круга, b — его радиус. Уравнения (6.53), (6.54) служат для определения постоянных D и D' . Для того чтобы переход был оптимальным, каждая из этих постоянных, как показано в разд. 6.2, должна принимать значения из интервала $[0, 1]$. Это приводит к следующему неравенству для величины e :

$$1 \leq (1 + e)^{1/2} (2 - e) \leq 2, \quad (6.55)$$

$$1 \leq (1 - e)^{1/2} (2 + e) \leq 2. \quad (6.56)$$

График функции

$$y = (1 + x)^{1/2} (2 - x) \quad (6.57)$$

представлен на рис. 6.5. Рассмотрение этого рисунка показывает, что y лежит в интервале $[1, 2]$ для всех

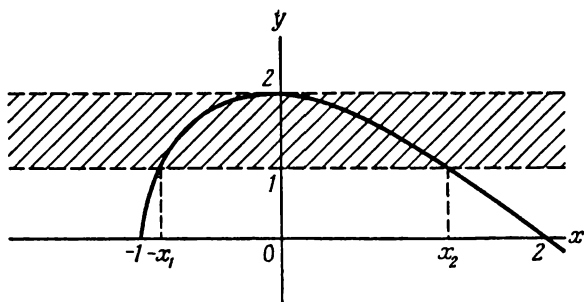


Рис. 6.5.

значений x из интервала $[-x_1, x_2]$. Очевидно, что неравенства (6.55), (6.56) удовлетворяются при условии, что e принадлежит отрезку $[0, e_0]$, где e_0 — меньшее из чисел x_1 и x_2 . Пусть $-x_1, x_2$ — корни уравнения

$$x^3 - 3x^2 + 3 = 0. \quad (6.58)$$

Путем численных расчетов находим приближенные значения корней $x_1=0,8794\dots$, $x_2=1,347\dots$. Отсюда

$$0 \leq e \leq 0,8794. \quad (6.59)$$

Из рис. 6.4 очевидно, что

$$a = OA = a(1 - e), \quad b = OB = a(1 + e), \quad (6.60)$$

где a — большая полуось эллипса перехода. Разрешая эти уравнения относительно a и e , получаем

$$a = \frac{1}{2}(a + b), \quad e = \frac{\rho - 1}{\rho + 1}, \quad (6.61)$$

где $\rho = b/a$. Условие (6.59) можно теперь трактовать как неравенство для величины ρ :

$$1 \leq \rho \leq 15,6. \quad (6.62)$$

Таким образом, гомановский переход заведомо не оптимален, если отношение радиусов круговых орбит превышает 15,6.

Этот результат был впервые получен Хёлькером и Зильбером [2], которые показали, что можно найти

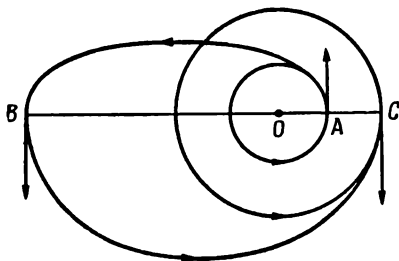


Рис. 6.6.

трехимпульсный маневр, более экономичный по расходу топлива. Трехимпульсный переход проводится следующим образом (рис. 6.6). При помощи первого импульса, приложенного в точке соединения по касательной к исходной орбите, ракета выводится на эллиптическую орбиту, большая полуось которой превышает соответствующую величину гомановского эллипса перехода. По касательной к эллиптической

орбите в ее апоцентре B прикладывается второй импульс, с помощью которого ракета переводится на новую эллиптическую орбиту, касающуюся большого круга в своем перигентре C . Третий импульс, приложенный в C против движения, выводит ракету на ее конечную круговую орбиту. Чем больше расстояние OB , тем экономичнее становится маневр; в пределе, при удалении точки B в бесконечность, эллипс перехода превращается в параболу, и величина импульса в точке B падает до нуля. Однако при $\rho > 15,6$ любой трехимпульсный маневр этого типа (точка B лежит вне большого круга) более выгоден по сравнению с гомановским. Маневр Гомана можно рассматривать как особый случай трехимпульсного перехода, когда B лежит на большом круге и величина приложенного в точке C импульса равна нулю. Поэтому, когда B лежит вне большого круга, трехимпульсный маневр можно рассматривать как развитие гомановского маневра, полученное с помощью малой вариации его программы регулирования тяги. Вот почему переход Гомана при этих условиях оказывается не оптимальным.

При $\rho < 15,6$ малые вариации указанного вида программы Гомана приводят к увеличению расхода топлива, как и следовало ожидать. Однако при условии $11,9 < \rho < 15,6$ (OB достаточно велико) Хелькер и Зильбер показали, что трехимпульсный маневр может оставаться более экономичным по сравнению с гомановским перелетом. Однако вариация гомановской программы для величины тяги, необходимая для превращения ее в соответствующую программу более выгодного трехимпульсного маневра, оказывается большой, вследствие чего эллипс Гомана продолжает оставаться оптимальным относительно малых вариаций — единственных вариаций, которые рассматриваются в нашей теории.

Таким образом, оптимальных маневров при условии $\rho > 15,6$ не существует. Если переход совершается по трехимпульсной схеме, то путем неограниченного увеличения OB можно сократить расходы топлива и приблизиться к некоторому нижнему пределу. Однако

этот нижний предел в действительности недостижим ни при каком конечном значении OB , в силу чего и не соответствует какому-нибудь практическому маневру.

6.6. Оптимальные маневры ухода

Если ракета приобрела достаточно большую скорость для ухода из гравитационного поля и движется на заключительном пассивном участке, то, согласно доказанному в разд. 3.3 [уравнение (3.59)], базис на нем определяется уравнением

$$\mathbf{p} = \mathbf{v}. \quad (6.63)$$

В частности, когда притяжение поля изменяется обратно пропорционально квадрату расстояния от центра тяготения, последнее соотношение выполняется на гиперболическом или параболическом участках траектории ухода. В силу условий, приведенных на стр. 76, в любой точке соединения на этом участке или в любой точке ее сопряжения с дугой ПТ производная $\dot{r}$ должна обращаться в нуль. Следовательно, в такой точке и производная $\dot{v}$ равна нулю. Однако $\dot{v}$ обращается в нуль только в аписиде траектории и ни в какой другой точке. В этой точке вектор $\mathbf{v}$ (а значит, и $\mathbf{p}$) перпендикулярен к радиус-вектору, откуда следует, что она не может принадлежать участку ПТ. Таким образом, апсида является точкой соединения, в которой импульс прикладывается по касательной к траектории. Как и в разд. 6.3 (стр. 120), можно сделать вывод, что оптимальная траектория ухода не может содержать участки ПТ и образуется только из конических сечений с совпадающими осями, касательными друг к другу в аписидальных точках.

Рассмотрим теперь одноимпульсный маневр ухода с круговой орбиты, который уже обсуждался в разд. 3.3. Там было показано, что если на ракету, обращающуюся по круговой орбите, действует импульс тяги в направлении ее движения, то аппарат переходит на гиперболическую орбиту и удаляется от центра тяготения, причем на гиперболической орбите

выполняются все условия оптимальности маневра. На этом пассивном участке базис и его производная определяются уравнениями (3.55). Остается решить вопрос, удовлетворяются ли условия оптимальности также и на исходной круговой орбите.

На круговой орбите компоненты базиса определяются из (6.7) и, поскольку тяга направлена по движению, следует взять D со знаком плюс и считать точку $f=0$ точкой соединения. Проекция вектора $\mathbf{p}$ в точке соединения тогда можно найти при помощи уравнений (6.36). Если V — скорость аппарата сразу после импульса, то (3.55) показывают, что $\mathbf{p}$, $\dot{\mathbf{p}}$ непрерывны в точке соединения при условии

$$P = V, \quad \frac{V^{1/2}}{2a^{3/2}}(P + D) = \frac{V}{a^2}, \quad (6.64)$$

где a — радиус круговой орбиты. Если $V_{кр} = \gamma^{1/2}/a^{1/2}$ — скорость обращения аппарата по круговой орбите, то

$$D = 2V_{кр} - V. \quad (6.65)$$

Однако условия оптимальности требуют выполнения неравенства $0 \leq D \leq P (= V)$, откуда

$$V_{кр} \leq V \leq 2V_{кр}. \quad (6.66)$$

Первое из этих неравенств, очевидно, удовлетворяется. Смысл второго неравенства лучше всего пояснить следующим образом.

Пусть V_∞ — скорость на гиперболической орбите в бесконечности, т. е. предельная скорость удаления от центра тяготения. Так как полная энергия аппарата на гиперболической траектории постоянна, то можно записать

$$\frac{1}{2} V^2 - \frac{\gamma}{a} = \frac{1}{2} V_\infty^2, \quad (6.67)$$

или

$$V_\infty^2 = V^2 - 2V_{кр}^2. \quad (6.68)$$

Отсюда ясно, что ракета может покинуть поле только при условии

$$V \geq \sqrt{2} V_{кр} = V_e.$$

Величина V_e носит название *скорости ухода* с круговой орбиты. Если $V \leq 2V_{кр}$, то из соотношения (6.68) следует, что

$$V_{\infty} \leq V_e. \quad (6.69)$$

Таким образом, рассматриваемый маневр ухода не может быть оптимальным, если предельная скорость, с которой аппарат удаляется от центра тяготения, превышает скорость ухода с круговой орбиты. Этот результат принадлежит Лоудену [5].

Если $V_{\infty} > V_e$, то уход, как показано в работе [5], можно выполнить более экономично с помощью двухимпульсного маневра. Сначала к аппарату прикладывается тормозной импульс, в результате чего аппарат переходит на эллиптическую орбиту, которая касается круга в апоцентре. При достижении ракетой перигея по направлению движения дается второй импульс с целью увеличить скорость аппарата до величины, необходимой для совершения маневра с предельной скоростью V_{∞} . Чем ближе вторая точка соединения к центру тяготения, тем более экономичным становится маневр; однако, в силу того что эта точка не может совпадать с центром тяготения, условия оптимальности невыполнимы и оптимальный маневр не существует.

6.7. Общий случай оптимального перехода

Если оси двух компланарных орбит не совпадают, переход между ними нельзя совершить при помощи последовательности эллипсов, касательных друг к другу в своих апсидальных точках, так что развитая в предыдущих разделах теория неприменима. Отсюда следует, что участки ПТ нельзя более исключать из состава оптимальной траектории, и действительно, они могут оказаться более приемлемыми по сравнению с рассмотренными ранее типами участков. Следует также помнить, что найденные нами условия оптимальности могут служить только для определения траекторий, оптимальных относительно *малых* вариаций программы тяги. Это означает, что в отдельных

случаях может существовать целая совокупность оптимальных траекторий, однако у нас нет никакого критерия, за исключением прямого сравнения соответствующих значений характеристической скорости, для выделения абсолютного оптимального типа перехода из найденной совокупности. Так, при пересечении заданных орбит переход между ними может быть совершен путем приложения одного импульса в точке пересечения. Последний полностью определяется, если элементы орбит известны, а вместе с этим находится и базис в точке пересечения. Подставляя эти данные для точки пересечения двух орбит в уравнения (5.55), (5.56), получаем четыре условия. Еще два дополнительных соотношения даются условием непрерывности $\dot{r}$ в точке соединения. Эти шесть уравнений позволяют найти постоянные A , B , D на двух орбитах, после чего базис полностью определяется всюду. При условии, что модуль найденного таким путем базиса нигде не превосходит единицу, этот тип перехода дает относительный экстремум. Однако одновременно могут существовать также переходы с двумя и большим числом импульсов, удовлетворяющие всем необходимым условиям, так что каждый из них является относительным оптимальным переходом. Ясно, что на современном уровне теории вначале приходится выбирать порядок чередования различных участков тяги, и только после этого наши условия позволяют найти относительный экстремум из класса всех программ с принятой картиной распределения участков тяги по траектории. Однако не существует критерия, при помощи которого можно было бы заранее найти структуру абсолютного оптимального управления.

Проведенный в разд. 4.1 анализ частного случая, когда гравитационное поле однородно, наталкивает нас на мысль, что любой участок промежуточной тяги без дополнительных затрат топлива можно заменить двумя отрезками импульсной тяги, разделенными пассивным участком. Однако численные расчеты приводят к существованию таких орбит, между которыми переход можно произвести при помощи одного

участка промежуточной тяги и для которых лучший двухимпульсный перелет требует большего количества топлива. Таким образом, представляется вероятным, что участок (участки) ПТ будет, вообще говоря, существовать на оптимальной траектории. В этой связи читатель отсылается к статье Лоудена [7, разд. X], где показано, что величина базиса всегда максимальна (как и требуется) в любой точке соединения дуг ПТ и НТ. Однако, исходя из условия Якоби (см. разд. 1.11), которое в настоящей книге не используется, следует ожидать, что длительность любого участка ПТ в составе оптимальной траектории не должна быть слишком большой. Этим, в частности, можно объяснить отмеченные в работе [7, разд. XI] преимущества двухимпульсного перехода между двумя квазикруговыми орбитами по сравнению с соответствующим переходом по дуге промежуточной тяги в виде многовитковой спирали.

Поскольку до сих пор мы не располагаем возможностями распознавания типа оптимальной программы регулирования тяги для абсолютного оптимального перехода между двумя компланарными орбитами, то в последних разделах настоящей главы мы займемся изучением локальных оптимальных переходов двух простейших возможных видов: одно- и двухимпульсных переходов при отсутствии участков промежуточной тяги.

6.8. Одноимпульсные переходы

Любую эллиптическую орбиту в заданной плоскости, проходящей через центр тяготения, можно полностью задать тремя элементами: параметром l , эксцентриситетом e и долготой $\tilde{\omega}$ перицентра относительно некоторой оси отсчета $\theta=0$. Рассмотрим две орбиты с элементами $(l', e', \tilde{\omega}')$ и $(l, e, \tilde{\omega})$, которые по предположению пересекаются в некоторой точке P . Соответствующий импульс, приложенный в P , вызывает переход с первой орбиты на вторую и, как показано в предыдущем разделе, полностью определяет базис во всех точках обеих орбит. В этом разделе мы выведем

уравнения, удобные для отыскания базиса на обеих орбитах. Если после этого окажется, что модуль найденного базиса нигде не превосходит по величине единицу, то, как известно, переход будет локально оптимальным.

Пусть (r, θ) — полярные координаты точки P , а $f', \bar{f}$ — истинные аномалии последней на двух орбитах. Тогда имеем уравнения

$$e' \cos f' = \frac{l'}{r} - 1, \quad (6.70)$$

$$e \cos f = \frac{l}{r} - 1, \quad (6.71)$$

$$f' = \theta - \tilde{\omega}', \quad (6.72)$$

$$f = \theta - \tilde{\omega}, \quad (6.73)$$

определяющие $r, \theta, \bar{f}$ и f' . Обозначим через φ угол, образованный импульсом тяги T с перпендикуляром к

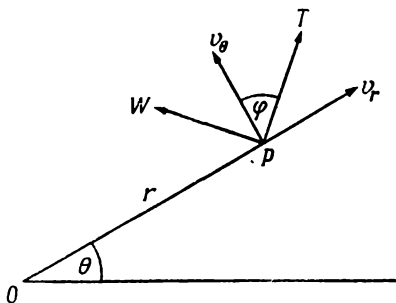


Рис. 6.7.

радиус-вектору OP в сторону движения (рис. 6.7). Составляющая W скорости ракеты в точке P , перпендикулярная T , не изменяется от этого импульса и является для обеих орбит одинаковой. Пусть v_r, v_θ — радиальная и тангенциальная составляющие скорости ракеты в точке P орбиты $(l, e, \tilde{\omega})$. Тогда

$$W = v_\theta \sin \varphi - v_r \cos \varphi. \quad (6.74)$$

При помощи (6.18) можно переписать последнее уравнение в следующем виде:

$$e \sin f = \frac{l}{r} \operatorname{tg} \varphi - W \sqrt{\frac{l}{\gamma}} \sec \varphi. \quad (6.75)$$

Для второй орбиты получается аналогичная зависимость:

$$e' \sin f' = \frac{l'}{r} \operatorname{tg} \varphi - W \sqrt{\frac{l'}{\gamma}} \sec \varphi. \quad (6.76)$$

Соотношения (6.75), (6.76) служат для определения W и φ .

Запишем теперь уравнения, выражающие, что $\mathbf{p}$ служит единичным вектором по направлению импульса в точке P и что производная $\dot{\mathbf{r}}$ в указанной точке непрерывна. Согласно равенствам (5.55), (5.56), (5.63) и (5.64), требуемые условия принимают вид

$$\left. \begin{aligned} A' \cos f' + B' e' \sin f' &= A \cos f + B e \sin f = \sin \varphi, \\ -A' \sin f' + B' (1 + e' \cos f') + \frac{D' - A' \sin f'}{1 + e' \cos f'} &= \\ = -A \sin f + B (1 + e \cos f) + \frac{D - A \sin f}{1 + e \cos f} &= \cos \varphi, \\ l'^{1/2} \left(\frac{A' \sin f' - D'}{1 + e' \cos f'} - B' \right) &= l'^{1/2} \left(\frac{A \sin f - D}{1 + e \cos f} - B \right), \\ l'^{-3/2} [-A' (e' + \cos f') + D' e' \sin f'] &= \\ = l'^{-3/2} [-A (e + \cos f) + D e \sin f]. \end{aligned} \right\} \quad (6.77)$$

Последние уравнения дают достаточное количество условий для определения A, B, D, A', B', D' .

Разрешая (6.77) относительно A и используя (6.75) и (6.76) по редукции, находим

$$e \sqrt{\frac{\gamma}{l}} A = W - \frac{\gamma}{Wr} \sin^2 \varphi. \quad (6.78)$$

Из второго уравнения системы (6.77) имеем

$$B e \sin f = \sin \varphi - A \cos f. \quad (6.79)$$

Подставляя A из (6.78) и используя (6.71), (6.75), можно затем показать, что

$$e^2 B = \left(\frac{l}{r} - 1\right) \left(1 + \frac{\gamma^{1/2}}{W l^{1/2}} \sin \varphi\right) \cos \varphi + \\ + \left(\frac{l}{r} \sin \varphi - \frac{W l^{1/2}}{\gamma^{1/2}}\right) \operatorname{tg} \varphi. \quad (6.80)$$

Перепишем четвертое уравнение системы (6.77) в форме

$$B + D = (1 + e \cos f) \cos \varphi + \\ + (2 + e \cos f)(A \sin f - B e \cos f) \quad (6.81)$$

и, подставив в правую часть последнего значение B из (6.79), получим с учетом (6.71), (6.75) и (6.78):

$$B + D = - \left[1 + \frac{\gamma^{1/2}}{W l^{1/2}} \left(\frac{l}{r} + 1\right) \sin \varphi\right] \cos \varphi. \quad (6.82)$$

Постоянные A , B , D можно теперь без труда найти из равенств (6.78), (6.80) и (6.82). После того как это проделано, базис полностью определяется на орбите $(l, e, \tilde{\omega})$. Заменяя A , B , D , l , e в уравнениях (6.78), (6.80), (6.82) соответствующими величинами со штрихом, получаем уравнения, определяющие A' , B' , D' , а следовательно, и базис на второй орбите.

Для определения характеристической скорости маневра необходимо вычислить только составляющие скорости аппарата в точке P на обеих орбитах. Разность их равна приращению скорости за счет действия импульса. Пусть U — составляющая орбитальной скорости по направлению T на орбите $(l, e, \tilde{\omega})$. Тогда из геометрических соображений (рис. 6.7) ясно, что

$$v_\theta = U \cos \varphi + W \sin \varphi. \quad (6.83)$$

Отсюда

$$U = \frac{\sqrt{\gamma l}}{r} \sec \varphi - W \operatorname{tg} \varphi. \quad (6.84)$$

Для аналогичной составляющей U' на орбите $(l', e', \tilde{\omega}')$ точно так же имеем

$$U' = \frac{\sqrt{\gamma l'}}{r} \sec \varphi - W \operatorname{tg} \varphi. \quad (6.85)$$

Вычитая последнее соотношение из (6.84), получаем значение характеристической скорости

$$V = U - U' = \frac{v^{1/2}}{r} (l^{1/2} - l'^{1/2}) \sec \varphi. \quad (6.86)$$

6.9. Двухимпульсные переходы

Пусть $(l_1, e_1, \tilde{\omega}_1)$, $(l_2, e_2, \tilde{\omega}_2)$ — орбитальные элементы двух компланарных орбит с одинаковыми направлениями обращения. Предполагая, что переход между указанными орбитами происходит по двухимпульсной схеме, обозначаем через $(l, e, \tilde{\omega})$ элементы орбиты перехода. Последняя пересекает заданные орбиты в двух точках P_i , где $i=1$ или 2 в зависимости от того, лежит ли точка на первой или второй орбите. Обозначим через (r_i, θ_i) полярные координаты точек P_i , через φ_i — углы, образуемые импульсом тяги с перпендикуляром к радиус-вектору в точках P_i , а через W_i — составляющие скорости, перпендикулярные к импульсам.

Тогда значения постоянных A, B, D на орбите перехода, вычисленные в точках P_1 и P_2 , должны быть одними и теми же. Прежде чем выписать эти условия, удобно ввести новые переменные, положив

$$p = \frac{1}{l}, \quad q = \frac{e}{l}, \quad (6.87)$$

$$s_i = \frac{1}{r_i}, \quad Z_i = \frac{W_i}{v^{1/2} \sin \varphi_i}. \quad (6.88)$$

Тогда указанные три условия принимают следующий вид:

$$(Z_1 - s_1/Z_1) \sin \varphi_1 = (Z_2 - s_2/Z_2) \sin \varphi_2, \quad (6.89)$$

$$\begin{aligned} (s_1 - p)(1 + p^{1/2}/Z_1) \cos \varphi_1 + (s_1 - Z_1 p^{1/2}) \sin \varphi_1 \operatorname{tg} \varphi_1 = \\ = (s_2 - p)(1 + p^{1/2}/Z_2) \cos \varphi_2 + (s_2 - Z_2 p^{1/2}) \sin \varphi_2 \operatorname{tg} \varphi_2. \end{aligned} \quad (6.90)$$

$$\left(1 + \frac{s_1 + p}{Z_1 p^{1/2}}\right) \cos \varphi_1 = \left(1 + \frac{s_2 + p}{Z_2 p^{1/2}}\right) \cos \varphi_2. \quad (6.91)$$

Способ разрешения этих уравнений, данный в работе Лоудена [6], сводится к определению характеристической скорости V маневра перехода в зависимости от элементов $(l, e, \tilde{\omega})$ и составлению условия стационарности V относительно всех малых вариаций этих элементов.

Чтобы замкнуть систему, определяющую оптимальную орбиту перехода, нужно записать уравнения связи величин $s_i, \theta_i, Z_i, \varphi_i$ с элементами орбит. Обращаясь к уравнению орбиты в полярных координатах (6.8), получаем четыре условия, выражающие, что точки соединения (r_i, θ_i) лежат на соответствующих орбитах:

$$q_1 \cos(\theta_1 - \tilde{\omega}_1) = s_1 - p_1, \quad (6.92)$$

$$q \cos(\theta_1 - \tilde{\omega}) = s_1 - p, \quad (6.93)$$

$$q \cos(\theta_2 - \tilde{\omega}) = s_2 - p, \quad (6.94)$$

$$q_2 \cos(\theta_2 - \tilde{\omega}_2) = s_2 - p_2. \quad (6.95)$$

Тогда для каждой точки соединения имеют место два равенства вида (6.75). Приведем их:

$$q_1 \sin(\theta_1 - \tilde{\omega}_1) = (s_1 - p_1^{1/2} Z_1) \operatorname{tg} \varphi_1, \quad (6.96)$$

$$q \sin(\theta_1 - \tilde{\omega}) = (s_1 - p^{1/2} Z_1) \operatorname{tg} \varphi_1, \quad (6.97)$$

$$q \sin(\theta_2 - \tilde{\omega}) = (s_2 - p^{1/2} Z_2) \operatorname{tg} \varphi_2, \quad (6.98)$$

$$q_2 \sin(\theta_2 - \tilde{\omega}_2) = (s_2 - p_2^{1/2} Z_2) \operatorname{tg} \varphi_2. \quad (6.99)$$

При помощи одиннадцати уравнений (6.89) — (6.99) можно найти одиннадцать неизвестных величин: $s_1, s_2, \theta_1, \theta_2, Z_1, Z_2, \varphi_1, \varphi_2, p, q, \tilde{\omega}$.

Решение указанной системы уравнений было найдено (Лоуден [6], Плиммер [8] и Смит [9]) для следующих случаев: 1) оси заданных орбит лежат на одной прямой и 2) заданные орбиты идентичны во всем, за исключением их ориентации (задача о повороте оси орбиты). В заключительном разделе мы получим решение для случая перехода между заданными орбитами с малым эксцентриситетом.

6.10. Переход между заданными орбитами с малым эксцентриситетом

Пусть $(p_1, eq_1, \tilde{\omega}_1)$, $(p_2, eq_2, \tilde{\omega}_2)$ — элемент двух почти круговых компланарных орбит в поле одного и того же центра тяготения (ϵ — малая величина). Предположим, что все одиннадцать характеризующих оптимальный двухимпульсный переход величин, описываемых уравнениями (6.89) — (6.99), суть регулярные функции ϵ при достаточно малых значениях последнего. Тогда можно представить их в виде ряда по степеням ϵ . Удобно обозначить эти одиннадцать неизвестных символами $\bar{s}_1, \bar{s}_2, \dots, \tilde{\omega}$ и записать степенные ряды в виде

$$\left. \begin{aligned} \bar{s} &= s_1 + \epsilon s'_1 + \epsilon^2 s''_1 + \dots, \\ \tilde{\omega} &= \tilde{\omega} + \epsilon \tilde{\omega}' + \epsilon^2 \tilde{\omega}'' + \dots \end{aligned} \right\} \quad (6.100)$$

Вычислим эти разложения с точностью до членов первого порядка относительно ϵ . Результаты, к которым мы придем, принадлежат Смитсу [9]. (Замечание. Штрихи в (6.100) указывают порядок относительно ϵ и не обозначают, как раньше, дифференцирование.)

Заменяя q_1, q_2 в (6.89) — (6.99) значениями eq_1, eq_2 соответственно, подставляя разложения в степенные ряды (6.100) и приравнивая члены нулевого порядка в обеих частях каждого из уравнений, получаем следующие соотношения:

$$(Z_1 - s_1/Z_1) \sin \varphi_1 = (Z_2 - s_2/Z_2) \sin \varphi_2, \quad (6.101)$$

$$\begin{aligned} (s_1 - p)(1 + p^{1/2}/Z_1) \cos \varphi_1 + (s_1 - Z_1 p^{1/2}) \sin \varphi_1 \operatorname{tg} \varphi_1 = \\ = (s_2 - p)(1 + p^{1/2}/Z_2) \cos \varphi_2 + \\ + (s_2 - Z_2 p^{1/2}) \sin \varphi_2 \operatorname{tg} \varphi_2, \end{aligned} \quad (6.102)$$

$$\left(1 + \frac{s_1 + p}{Z_1 p^{1/2}}\right) \cos \varphi_1 = \left(1 + \frac{s_2 + p}{Z_2 p^{1/2}}\right) \cos \varphi_2, \quad (6.103)$$

$$0 = s_1 - p_1, \quad (6.104)$$

$$q \cos(\theta_1 - \tilde{\omega}) = s_1 - p, \quad (6.105)$$

$$q \cos(\theta_2 - \tilde{\omega}) = s_2 - p, \quad (6.106)$$

$$0 = s_2 - p_2, \quad (6.107)$$

$$0 = (s_1 - Z_1 p_1^{1/2}) \operatorname{tg} \varphi_1, \quad (6.108)$$

$$q \sin(\theta_1 - \tilde{\omega}) = (s_1 - Z_1 p_1^{1/2}) \operatorname{tg} \varphi_1, \quad (6.109)$$

$$q \sin(\theta_2 - \tilde{\omega}) = (s_2 - Z_2 p_2^{1/2}) \operatorname{tg} \varphi_2, \quad (6.110)$$

$$0 = (s_2 - Z_2 p_2^{1/2}) \operatorname{tg} \varphi_2. \quad (6.111)$$

Последние зависимости, очевидно, идентичны соотношениям (6.89) — (6.99), в которых q_1 и q_2 положены равными нулю. Следовательно, решение этих уравнений соответствует оптимальному двухимпульсному переходу между двумя круговыми орбитами, т. е. гомановскому переходу. В предположении, что переход происходит с меньшей орбиты на большую, для гомановского перехода известно

$$\left. \begin{aligned} \varphi_1 = \varphi_2 = 0, \quad \theta_1 - \tilde{\omega} = 0, \quad \theta_2 - \tilde{\omega} = \pi, \\ s_1 = p_1, \quad s_2 = p_2. \end{aligned} \right\} \quad (6.112)$$

Уравнения (6.104) — (6.111) удовлетворяются, если принять

$$p = \frac{1}{2}(p_1 + p_2), \quad q = \frac{1}{2}(p_1 - p_2). \quad (6.113)$$

Пусть a_1 , a_2 — радиусы круговых орбит, тогда $p_1 = 1/a_1$, $p_2 = 1/a_2$ и в силу (6.113) параметр и эксцентриситет орбиты перехода с точностью до членов первого порядка относительно ε равны:

$$l = \frac{1}{p} = \frac{2a_1 a_2}{a_1 + a_2}, \quad (6.114)$$

$$e = \frac{q}{p} = \frac{a_2 - a_1}{a_2 + a_1}. \quad (6.115)$$

Эти результаты следуют также из геометрических соображений (см. рис. 6.4). Пока $\tilde{\omega}$ не определено, ориентация гомановского эллипса перехода остается произвольной.

Уравнение (6.101) удовлетворяется, так как $\varphi_1 = \varphi_2 = 0$. Соотношения (6.102), (6.103) приводятся к виду

$$2\sqrt{2} + (p_1 + p_2)^{1/2} \left(\frac{1}{Z_1} + \frac{1}{Z_2} \right) = 0, \quad (6.116)$$

$$\frac{3p_1 + p_2}{Z_1} = \frac{p_1 + 3p_2}{Z_2}. \quad (6.117)$$

Отсюда

$$Z_1 = -\frac{\sqrt{2}(p_1 + p_2)^{3/2}}{p_1 + 3p_2}, \quad Z_2 = -\frac{\sqrt{2}(p_1 + p_2)^{3/2}}{3p_1 + p_2}. \quad (6.118)$$

Вернемся к рассмотрению членов первого порядка относительно ε . Подставляя найденные в нулевом приближении значения переменных в (6.89)–(6.99), получаем следующие уравнения относительно членов первого порядка:

$$(Z_1 - p_1/Z_1)\Phi'_1 = (Z_2 - p_2/Z_2)\Phi'_2, \quad (6.119)$$

$$\begin{aligned} (s'_1 - p')(1 + p^{1/2}/Z_1) + (p_1 - p)\left(\frac{p'}{2p^{1/2}Z_1} - \frac{p^{1/2}Z'_1}{Z_1^2}\right) = \\ = (s'_2 - p')(1 + p^{1/2}/Z_2) + (p_2 - p)\left(\frac{p'}{2p^{1/2}Z_2} - \frac{p^{1/2}Z'_2}{Z_2^2}\right), \end{aligned} \quad (6.120)$$

$$\begin{aligned} \frac{s'_1 + p'}{Z_1 p^{1/2}} - (p_1 + p)\left(\frac{Z'_1}{Z_1^2 p^{1/2}} + \frac{p'}{2Z_1 p^{3/2}}\right) = \\ = \frac{s'_2 + p'}{Z_2 p^{1/2}} - (p_2 + p)\left(\frac{Z'_2}{Z_2^2 p^{1/2}} + \frac{p'}{2Z_2 p^{3/2}}\right), \end{aligned} \quad (6.121)$$

$$q_1 \cos(\tilde{\omega} - \tilde{\omega}_1) = s'_1, \quad (6.122)$$

$$q' = s'_1 - p', \quad (6.123)$$

$$-q' = s'_2 - p', \quad (6.124)$$

$$-q_2 \cos(\tilde{\omega} - \tilde{\omega}_2) = s'_2, \quad (6.125)$$

$$q_1 \sin(\tilde{\omega} - \tilde{\omega}_1) = (p_1 - Z_1 p_1^{1/2})\Phi'_1, \quad (6.126)$$

$$q(\theta'_1 - \tilde{\omega}') = (p_1 - Z_1 p_1^{1/2})\Phi'_1, \quad (6.127)$$

$$-q(\theta'_2 - \tilde{\omega}') = (p_2 - Z_2 p_2^{1/2})\Phi'_2, \quad (6.128)$$

$$-q_2 \sin(\tilde{\omega} - \tilde{\omega}_2) = (p_2 - Z_2 p_2^{1/2})\Phi'_2. \quad (6.129)$$

Разделив (6.129) на (6.126), получаем

$$-\frac{q_2 \sin(\tilde{\omega} - \tilde{\omega}_2)}{q_1 \sin(\tilde{\omega} - \tilde{\omega}_1)} = \frac{(p_2 - Z_2 p_2^{1/2})\Phi'_2}{(p_1 - Z_1 p_1^{1/2})\Phi'_1}. \quad (6.130)$$

Исключая отношение φ'_2/φ'_1 при помощи (6.119) и подставляя Z_1, Z_2 из (6.118), записываем последнее соотношение в форме

$$-\frac{\sin(\tilde{\omega}-\tilde{\omega}_2)}{\sin(\tilde{\omega}-\tilde{\omega}_1)} = \frac{q_1}{q_2} P\left(\frac{p_2}{p_1}\right), \quad (6.131)$$

где после упрощений

$$P(x) = \frac{1+3x-V\sqrt{2}(1+x)^{3/2}}{3+x-V\sqrt{\frac{2}{x}}(1+x)^{3/2}}. \quad (6.132)$$

Уравнение (6.131) определяет $\tilde{\omega}$. Разрешая его относительно $\tilde{\omega}$, находим

$$\operatorname{tg} \tilde{\omega} = \frac{Q \sin \tilde{\omega}_1 + \sin \tilde{\omega}_2}{Q \cos \tilde{\omega}_1 + \cos \tilde{\omega}_2}, \quad (6.133)$$

где

$$Q = \frac{q_1}{q_2} P\left(\frac{p_2}{p_1}\right). \quad (6.134)$$

График $P(x)$ грубо можно аппроксимировать следующей зависимостью:

$$P(x) = x. \quad (6.135)$$

Отсюда с той же степенью приближения имеем

$$Q = \frac{q_1 p_2}{q_2 p_1} = \frac{e_1}{e_2}, \quad (6.136)$$

где e_1, e_2 — эксцентриситеты заданных орбит. Следовательно, уравнение (6.133) можно записать в следующей приближенной форме:

$$\operatorname{tg} \tilde{\omega} = \frac{e_1 \sin \tilde{\omega}_1 + e_2 \sin \tilde{\omega}_2}{e_1 \cos \tilde{\omega}_1 + e_2 \cos \tilde{\omega}_2}, \quad (6.137)$$

откуда ясно, что если $e_1 \gg e_2$, то $\tilde{\omega} \approx \tilde{\omega}_1$, а если $e_2 \gg e_1$, то $\tilde{\omega} \approx \tilde{\omega}_2$. Это означает, что ось эллипса перехода стремится совпасть с осью заданной орбиты с большим значением эксцентриситета. Это правило

тяготения эксцентриситетов. В частности, когда одна из орбит является круговой, ось эллипса перехода лежит на одной прямой с осью эллиптической орбиты. Этот результат был получен в одном из первых разделов настоящей главы.

После определения $\tilde{\omega}$ члены первого порядка в степенных разложениях элементарно находятся из (6.119) — (6.129). Однако на этом этапе величина $\tilde{\omega}'$ остается неизвестной и в случае необходимости может быть получена только из рассмотрения членов второго порядка.

Можно показать (Смит [9]), что найденное указанным методом решение первого порядка для орбиты перехода идентично с той же степенью приближения оптимальному эллипсу, соприкасающемуся с обеими заданными орбитами. Этот соприкасающийся эллипс был предметом исследования в работе Лоудена [4]. Однако в общем случае эллипс такого рода не образует оптимальную орбиту перехода, хотя обычно и близок к ней.

ЛИТЕРАТУРА

1. Bender D. F., Optimum coplanar two-impulse transfers between elliptic orbits, Institute of Aeronaut. Sciences Preprint, 62-64, 1962.
2. Hoelker R. F., Silber R., The bi-elliptical transfer between circular coplanar orbits, Army Ballistic Missile Agency, Redstone Arsenal, Ala. Report № DA-TM-2-59, 1959.
3. Hohmann W., Die Erreichbarkeit der Himmelskörper, Munich, Oldenbourg, 1925.
4. Lawden D. F., Optimal transfer via tangential ellipses, *J. Brit. Interplanet. Soc.*, 11, № 6, 278—289 (1952).
5. Lawden D. F., Escape to infinity from circular orbits, *J. Brit. Interplanet. Soc.*, 12, № 2, 68—71 (1953).
6. Лоуден Д. Ф., Импульсный переход между эллиптическими орбитами. Методы оптимизации, гл. XI, «Наука», М., 1965, 387—415.
- 7*. Lawden D. F., Optimal intermediate thrust arcs in a gravitational field, *Astronaut. Acta*, 8, № 2-3, 106, 123 (1962).
8. Plimmer R. N. A., Fuel requirements for inter-orbital transfer of a rocket, Proc. of the Xth Internat. Astronaut. Congress, Vienna, Springer-Verlag, 1960.
9. Smith G. C., The calculation of minimal orbits, *Astronaut. Acta*, 5, № 5, 253—265 (1959).

Упражнения

1. Отношение радиусов двух компланарных круговых орбит, между которыми совершается переход по трехимпульсной схеме Хёлькера—Зильбера, равно $\rho = b/a > 1$, расстояние от центра тяготения до точки соединения, не лежащей ни на одном из кругов, равно $c > b$. Показать, что характеристическая скорость маневра дается формулой

$$V = \sqrt{\frac{\gamma}{b}} \left[\frac{\sqrt{2}(\rho x - 1)}{x^{1/2}(\rho x + 1)^{1/2}} + \sqrt{2} x^{-1/2} (1 + x)^{1/2} - \rho^{1/2} - 1 \right],$$

где $x = c/b$. Показать, что знаки производной dV/dx и выражения

$$3\rho + 1 + 6\rho(\rho + 1)x - \rho^2(\rho - 9)x^2$$

одинаковы при $x \geq 1$ и что V — монотонно убывающая функция для всех x при $\rho > 15,6$. Показать, что для указанных значений ρ трехимпульсный тип перехода экономичнее гомановского перехода для всех $x \geq 1$. Изобразить график $V(x)$ при $\rho < 15,6$ и показать, что если $\rho > 11,94$, то трехимпульсный переход более экономичен при достаточно больших значениях x .

2. Ракета, движущаяся по круговой орбите радиуса a со скоростью $v_{кр}$, должна уйти на бесконечность с остаточной скоростью v . Показать, что характеристическая скорость двухимпульсного перехода, описанного в конце разд. 6.6, дается выражением

$$V = v_{кр} [\sqrt{2}(x + \rho^2)^{1/2} - \sqrt{2}(x + 1)^{1/2} + 1],$$

где $\rho = v/(\sqrt{2} v_{кр})$, $x = a/a'$, $a' (< a)$ — расстояние второй точки соединения от центра тяготения. Показать, что при условии $\rho > 1$ скорость V монотонно убывает с ростом x , в силу чего двухимпульсный маневр более экономичен, чем уход при помощи одного касательного импульса для всех $x > 1$.

Послесловие переводчика

Исследование оптимальных космических траекторий является одной из наиболее привлекательных задач астродинамики, которая служит естественным продолжением и развитием классической небесной механики и отличается от последней объектом анализа (управляемые искусственные небесные тела — космические летательные аппараты). Количество публикаций на эту тему за последние годы во всем мире неизменно растет, так что удерживать в поле зрения весь этот поток информации становится затруднительно и специалисту. Поэтому назрела очевидная потребность в обобщающих трудах, подводящих итоги развития определенных областей космонавтики. Ряд обобщающих публикаций, частично восполняющих указанный пробел, можно разделить на две группы. Монографии и обзоры [1—5] освещают ряд специальных аспектов общей теории и вряд ли могут служить для начального ознакомления с предметом. Интересный, хотя и не всегда однородный материал собран в сборниках [6—8]. Ко второй группе относятся «Механика полета» Миеле [9] и превосходная книга группы известных специалистов и профессоров (Беллмана, Брекуэлла, Эдельбаума, Фолкнера, Калабы, Келли, Коппа, Миеле, Лоудена и др.), вышедшая под общей редакцией Лейтмана [10]. Две последние книги выгодно сочетают простоту и наглядность изложения с научной строгостью, что делает их незаменимым пособием для начинающих, а умелый отбор материала и обширная библиография — незаменимым справочником для инженеров и научных работников, специализирующихся в области динамики полета.

Предлагаемая ныне издательством «Мир» вниманию советского читателя монография Лоудена примыкает к последней группе. Дерек Ф. Лоуден является профессором математики Кентерберийского университета в Крайстчёрче (Новая Зеландия). Его имя много говорит специалисту. Вместе с Д. Е. Охочимским, Т. М. Энеевым, Лейтманом, В. А. Егоровым, А. А. Космодемьянским и Миеле проф. Д. Ф. Лоуден является основоположником современной теории оптимального движения космических аппаратов. Его ученики работают в ряде научно-исследовательских центров США, связанных с программой освоения космического пространства.

Строение книги очевидно из оглавления, направленность — из «Предварительных замечаний». Однако подлинное ее значение, по нашему мнению, существенно перерастает рамки, указанные самим автором.

Минувшее десятилетие в истории науки ознаменовалось формированием и торжеством новых направлений вариационного исчисления: теории оптимальных процессов (принципа максимума Л. С. Понтрягина), динамического программирования Беллмана, принципа оптимальности В. Ф. Кротова, функциональных методов (Дубовицкий, А. А. Милютин).

За годы, прошедшие с момента появления первых работ, посвященных исследованию оптимальных траекторий ракет с помощью динамического программирования [11] и принципа максимума [12], была показана эффективность этих методов. Особую популярность за последние годы завоевал принцип максимума, с которым связан большой прогресс, достигнутый во всем мире при решении практических задач со сложными ограничениями. (Метод динамического программирования применительно к динамике полета справедливо можно отнести к методам будущего, так как эффективность его в большей степени связана с возможностями вычислительной техники.)

В связи с очевидными достижениями, полученными на пути использования современной теории оптимальных процессов, у некоторых молодых научных работников сложилось превратное представление о

возможностях классических методов. Книга проф. Лоудена, как, впрочем, и исследования В. А. Троицкого (см., например, [13, 14, 22]), свидетельствует о далеко не исчерпанных возможностях классического вариационного исчисления. Все необходимые сведения из вариационного исчисления изложены автором в первой главе в современном стиле, удобном для анализа управляемых систем.

Что касается содержания монографии, следует особо выделить приведенные в гл. V основополагающие результаты, полученные автором при исследовании так называемого особого оптимального управления в центральном ньютоновом поле. Автор отмечает необходимость построения поля особых экстремалей с целью обнаружения сопряженных точек. Этот круг идей автора привлек к себе живейший интерес и породил интересную дискуссию. В частности, в 1964 г. де Вёбек и Гертс [15] показали, что в случае отсутствия ограничений на угловую дальность или время перелета спираль Лоудена (т. е. траектория с промежуточной величиной тяги) не может являться оптимальной траекторией. Аналогичный случай был обнаружен также Коппом и Мойером [16]. Обзор работ по теории особых экстремалей содержится в докладе Роббинса [23], где также показано, что экстремали этого типа являются в ряде случаев абсолютными.

Материал последней главы, посвященной импульсной теории перелетов, не дублирует содержания известных статей Лоудена [17, 18] в сборниках [6, 10]. Последние, равно как и обзор основных работ Лоудена до 1959 г., выполненный Хоком [19], можно рекомендовать в качестве дополнения к настоящей монографии. За время, прошедшее после ее издания в Англии (1963 г.), теория импульсных переходов (как, впрочем, и другие разделы интенсивно развивающейся астродинамики) обогатилась рядом интересных результатов, из которых мы отметим работу В. И. Чарного [20], где дано строгое доказательство того, что многоимпульсный переход состоит из соприкасающихся в апсидальных точках дуг конических сечений. В развитие этого С. В. Дубовским [21] было показа-

но, что случай перехода посредством приложения импульса в точке пересечения двух эллипсов (см. разд. 6.8 настоящей монографии) с малыми эксцентриситетами соответствует не минимуму, а максимуму функционала. Кроме того, в работе [21] показано, что оптимальное число трансверсальных импульсов в апсидальных точках при переходе между соосными эллиптическими орбитами не превышает четырех, считая и бесконечно удаленные точки, а также дано обобщение результатов Хёлькера и Зильбера на случай перехода между эллиптическими орбитами (ранее эти результаты были известны только для круговых орбит). В работе Марека [24] дано исследование оптимальных переходов между близкими квазикруговыми (в том числе и некомпланарными) орбитами, а также построены «области достижимости» переходов с заданным значением ΔV (в пространстве приращений орбитальных элементов).

С выходом настоящей монографии советский читатель получит еще одну книгу, представляющую большую научную ценность.

В. К. Исаев

ЛИТЕРАТУРА

1. Пономарев В. М., Теория управления движением космических аппаратов, «Наука», М., 1965.
2. Тарасов Е. В., Оптимальные режимы полета летательных аппаратов, Оборонгиз, М., 1963.
3. Гродзовский Г. Л., Иванов Ю. Н., Токарев В. В., Механика космического полета с малой тягой, *Инженерный журнал*, 3, № 3, 4, 530—616, 748—768 (1963); 4, № 1, 2, 168—196, 392—423 (1964).
4. Исаев В. К., Копнин Ю. М., Обзор некоторых качественных результатов, полученных в динамике полета с помощью принципа максимума, Доклад на XVII Международном астронавтическом конгрессе, Мадрид, 1966.
5. Рабинович Б. И., Вариационные режимы полета крылатых летательных аппаратов, М., 1966.
6. Космические траектории, ИЛ, М., 1963.
7. Исследования по динамике полета, под ред. И. В. Остославского, вып. I, Машиностроение, М., 1965.

8. Исследование оптимальных режимов движения ракет. Сборник переводов под ред. И. Н. Садовского, Оборонгиз, М., 1959.
9. Миеле А., Механика полета, т. I, «Наука», М., 1965.
10. Методы оптимизации с приложениями к механике космического полета, под ред. Дж. Лейтмана, «Наука», М., 1965.
11. Bellman R., Dreyfus S., An application of dynamic programming to the determination of optimum satellite trajectories, *J. Brit. Interplanet. Soc.*, 17, № 3-4, 1959.
12. Исаев В. К., Применение принципа максимума Л. С. Понтрягина к одному классу задач оптимального управления, Кандидатская диссертация, МФТИ, 1961.
13. Троицкий В. А., Вариационные задачи оптимизации процессов управления в системах с ограниченными координатами, *Прикл. матем. и механ.*, 24, № 3, 431—443 (1962).
14. Троицкий В. А., Вариационные задачи оптимизации процессов управления для уравнений с разрывными правыми частями, *Прикл. матем. и механ.*, 24, № 2 (1962).
15. Veubeke de B. M. F., Geerts J., Optimization of multiple impulse orbital transfers by maximum principle, Rept. OA-4, presented at XV Internat. Astronaut. Congress, Warsaw, 1964; русский перевод: де Вёбек Б. М. Ф., Гёртс Ж., сб. *Механика*, № 1 (95), 27—49 (1966).
16. Корр R. E., Мoyer H. G., Necessary conditions for singular extremals, *AIAA Journal*, 3, № 8, 1439—1444 (1965).
17. Лоуден Д. Ф., Межпланетные траектории ракет, в сб. [6], 177—242.
18. Лоуден Д. Ф., Импульсный переход между эллиптическими орбитами, в сб. [10], 387—415.
19. Хок Д. С., Космические маневры. Оптимизация, в сб. [6], 163—176.
20. Чарный В. И., Об оптимальных траекториях со многими импульсами. Искусственные спутники Земли, вып. 16, АН СССР, 1963, 257—264.
21. Дубовский С. В., Оптимальные перелеты в поле одного и двух притягивающих центров, Докл. на 2-м Всесоюзном съезде механиков, М., 1964.
22. Троицкий В. А., Оптимизация движения двухступенчатой ракеты, *Прикл. матем. и механ.*, 29, № 4, 745—750 (1965).
23. Robbins H. M., Optimal rocket trajectories with subarcs of intermediate thrust, Доклад на XVII конгрессе МАФ, Мадрид, 1966.
24. Marec J. P., Transferts infinitesimaux impulsions économiques entre orbits quasi-circulaires non coplanaires, Доклад на XVII конгрессе МАФ, Мадрид, 1966.

ОГЛАВЛЕНИЕ

Предисловие к русскому изданию	5
Предисловие автора	6
Предварительные замечания	9
1. Задача Майера	11
1.1. Введение	11
1.2. Краткий обзор результатов	12
1.3. Постановка задачи Майера	14
1.4. Допустимые вариации	16
1.5. Первая вариация J	18
1.6. Первые необходимые условия минимума J	21
1.7. Условия Вейерштрасса — Эрдмана для угловых точек	26
1.8. Первый интеграл	29
1.9. Второе необходимое условие минимума J	30
1.10. Третье необходимое условие минимума J	35
1.11. Вторая вариация. Достаточные условия	36
Литература	37
Упражнения	38
2. Различные задачи оптимизации траекторий	40
2.1. Уравнения движения ракеты	40
2.2. Максимизация дальности полета ракеты-снаряда	42
2.3. Оптимальный запуск искусственного спутника	47
2.4. Оптимальная программа регулирования тяги метеорологической ракеты	54
Литература	64
Упражнения	64
3. Общая теория оптимальных траекторий ракет	66
3.1. Дуги экстремали	66
3.2. Импульсная тяга	73
3.3. Частные случаи краевых условий	77

Литература	81
Упражнения	82
4. Оптимальные траектории в однородном поле	83
4.1. Общая теория	83
4.2. Частные задачи	86
Литература	92
Упражнения	92
5. Базис в ньютоновом поле тяготения	94
5.1. Участки нулевой тяги	94
5.2. Участки промежуточной тяги	102
5.3. Участки максимальной тяги	110
Литература	111
Упражнения	111
6. Межорбитальные перелеты	113
6.1. Введение	113
6.2. Базис на круговой орбите	113
6.3. Базис на конической орбите	116
6.4. Производная базиса	121
6.5. Переход между двумя круговыми орбитами	125
6.6. Оптимальные маневры ухода	130
6.7. Общий случай оптимального перехода	132
6.8. Одноимпульсные переходы	134
6.9. Двухимпульсные переходы	138
6.10. Переход между заданными орбитами с малым экс- центриситетом	140
Литература	144
Упражнения	145
Послесловие переводчика	146

Д. Ф. Лоуден

ОПТИМАЛЬНЫЕ ТРАЕКТОРИИ ДЛЯ КОСМИЧЕСКОЙ НАВИГАЦИИ

Редактор П. Я. Корсоюцкая. Художник И. А. Литвишко

Художественный редактор В. И. Шаповалов

Технический редактор А. Д. Хомяков.

Сдано в производство 7/VII 1966 г. Подписано к печати 30/XI 1966 г. Бумага
84×108¹/₃₂=2,38 бум. л. 7,98 печ. л. Уч.-изд. л. 6,40. Изд. № 1/3469
Цена 46 к. Зак. 262

ИЗДАТЕЛЬСТВО «МИР». Москва, 1-й Рижский пер., 2

Ленинградская типография № 2 имени Евгения Соколовой
Главполиграфпрома Комитета по печати при Совете Министров СССР
Измайловский проспект, 29.

46 коп.

